

Universidad Autónoma Metropolitana



Casa abierta al tiempo

Programa de Maestría en Ciencias Económicas

Título:

EL PROTOCOLO DE OPTIMIZACIÓN KANTIANA: UN ANÁLISIS DE INTERACCIÓN Y RETROALIMENTACIÓN CON AGENTES DE NASH.

Idónea Comunicación de Resultados para Obtener el Grado
de Maestro

Presentado por: Carlos Emiro Gutiérrez Arias

Asesores

Dr. Owen Eli Ceballos Mina

Dr. Pablo Javier Sánchez Buelna

Ciudad de México

Marzo 2020

Tabla de Contenido

Resumen	3
Abstract	3
1. Introducción	4
2. Fundamentos filosóficos del equilibrio kantiano.....	7
2.1. La voluntad pura e imperativo categórico.....	7
3. Protocolo de optimización Kantiana.....	10
3.1. El Dilema del prisionero	11
3.2. La Batalla de los sexos	14
3.3. Equilibrio con estrategias Kantianas	15
4. Optimización con estrategias racionales.....	20
4.1. Equilibrio de Nash	21
4.2. Coincidencias entre la optimización Kantiana y optimización de Nash	25
4.3. Interacción entre jugadores kantianos y jugadores <i>Nash</i>	27
4.4. Matriz de pagos del juego	33
5. Interacción Kant-Nash en juegos dinámicos.....	35
5.1. Juegos dinámicos infinitos	37
5.2. Interacción Kant- Nash, en juegos finitos.....	40
5.3. Comentarios finales.....	47
6. Conclusiones	48
Bibliografía	52

Resumen

El propósito de este documento es analizar el protocolo de optimización kantiano, en la interacción con agentes racionales en juegos estáticos y la retroalimentación en juegos dinámicos, a través de un modelo matemático. La estrategia metodológica se desarrolla en dos pasos: por un lado, aplica la literatura precedente sobre el tema a una forma funcional definida que ordena las preferencias de los agentes de Kant; y, en segundo lugar, realizar el mismo ejercicio para los jugadores racionales o de Nash, mientras se explora diferentes escenarios de interacción, ya sean entre agentes de la misma naturaleza, o entre agentes kantianos y de Nash; para el caso específico de bienes de propiedad común. Se establece que los agentes que adoptan estrategias recíprocas logran niveles de bienestar social mayores a los que produciría aquellos agentes que actúan con estrategias racionales y, que en muchas circunstancias una comunidad heterogénea donde algunos agentes son kantianos, puede establecer sendas de comportamiento que promueven la cooperación a lo largo del tiempo.

Abstract

The purpose of this document is to analyze the Kantian optimization protocol, in the interaction with rational agents in static games and feedback in dynamic games, through a mathematical model. The methodological strategy is developed in two steps: on the one hand, it applies the preceding literature on the subject to a defined functional form that orders the preferences of Kant's agents; and, in the other hand, to perform the same exercise for rational or Nash players, while exploring different interaction scenarios, whether agents of the same nature enter, or between Kantian and Nash agents, for the specific case of real estate assets. common property. It is established that the agents that adopt reciprocal strategies achieve higher levels of social well-being than those that act with rational strategies would produce and, that in many circumstances a heterogeneous community where some

agents are Kantians, can establish behavior paths that promote cooperation over time.

Palabras Clave: Equilibrio Kantiano, Imperativo Categórico, Tragedia de los Comunes, Equilibrio de Nash.

Clasificación JEL: D600, D710, D620, C700.

1. Introducción

Cuando se habla de interacción estratégica, una de las primeras ideas que llega a la mente es teoría de juegos, y casi inmediatamente sobreviene la noción de equilibrios de Nash. Este último sostiene que una estrategia será de equilibrio, si y solo si, es la mejor respuesta para cada uno de los jugadores. El concepto de equilibrio de Nash ha mostrado ser útil en variadas situaciones (dilema del prisionero, batalla de los sexos, juego de suma cero, duopolio de Cournot, entre otros), sin embargo, existe la duda de: ¿podrían los jugadores recurrir a otro tipo de estrategias que mejore sus asignaciones? Al respecto Roemer (2014, p. 56) argumenta que los modelos económicos en los que existe externalidades positivas o negativas, como el de la tragedia de los comunes, los equilibrios kantianos dominan a los equilibrios de Nash.

Para ver esto en más detalle, considere dos tipos de comportamiento para agentes que actúan motivados por el interés personal: 1) el agente posee un conjunto de expectativas sobre la estrategia de cada jugador, de modo tal que una vez revelada la elección de este último, ninguno de los agentes deseara cambiar de conducta (Mas-Colell et al. 1995, p. 246). 2) El agente que busca su propio beneficio, advierte que existe entre los demás una coincidencia recíproca de objetivos y, que los demás agentes que son tan racionales como él, poseen la capacidad para elaborar una estrategia de intención conjunta; de modo tal que la estrategia que decida para favorecer su interés, será también decidida por los otros jugadores, en virtud de la capacidad de razonamiento y la idea de reciprocidad. Se

identifica el primer tipo de comportamiento con el método de optimización de Nash y el segundo con el protocolo kantiano.

Las dos formas de abordar un comportamiento caracterizado por el interés son diferentes, tanto en la lógica que implica el razonamiento, como en los resultados a los que se llega. En un contexto de bienes de propiedad común, cuando se acude al primer razonamiento, los agentes que actúan motivados por las ventajas individuales pueden conducir a la destrucción del recurso común (Hardín 1968, p. 1248). El segundo método que tiende a la cooperación, aunque requiere mayores suposiciones sobre el escenario, la naturaleza del juego y el tipo de jugadores, puede conducir a la solución de la tragedia de los comunes. La existencia de reglas sociales que aseguren la utilización organizada en pequeñas economías de pescadores, que impongan sanciones a los miembros de la comunidad que sobreexploten el recurso, ocasiona en los agentes un tipo de comportamiento cooperativo (Ostrom 1990, p. 4).

El equilibrio Kantiano incursiona en la economía, debido a la imposibilidad de los modelos convencionales, para proporcionar respuestas a ciertos comportamientos de los agentes. Resultaba intrigante para los economistas, porque en ciertas playas los bañistas llevaban consigo los desechos que habían consumido durante su estancia en la playa. Si los agentes persiguen el bienestar ¿qué impacto tendría sobre su utilidad el recoger su basura? Se descubrió que las acciones económicas tienen lugar en un marco ético (Laffont 1975, p. 437), puesto que los agentes tienen presente elementos al momento de elaborar sus estrategias, que van más allá de lo económico (Wicksteed 1967, p.179).

Estos individuos en un marco moral o ético, que ya no son indiferentes a las características particulares y las relaciones sociales que se pueden entablar entre ellos, validan el comportamiento colaborativo o cooperativo. Sin embargo, los juegos cooperativos, han desarrollado otros conceptos de equilibrio donde los jugadores racionales pueden aliarse o formar grupos para conseguir mejores resultados, y gran parte de esta literatura se centra en los valores de Shapley. Una revisión importante de esta del tema puede ser consultada en (Debraj, 2007). Si

bien existe una idea de juegos cooperativos, convencionalmente se ha adaptado en una forma muy reducida: el comportamiento cooperativo en vez de modelarse, se representa definiendo los valores de coalición (Roemer 2014, p. 56).

Por su parte, el protocolo de optimización kantiana, presenta una idea de cooperación en un sentido alternativo. El agente “coopera si y solo si resulta mejor para todos el que todos cooperen a que nadie coopere” (Elster 2000, p. 66). Por lo que un jugador kantiano procura el bienestar de las demás personas no de manera desinteresada, sino con la intención de ayudarse a sí mismo. Existe una intención conjunta en los agentes que los impulsa a actuar de manera coordinada.

En este contexto la pregunta de investigación a la que pretende dar respuesta este documento es: ¿son los equilibrios Kantianos el resultado de una norma o un canon establecido en determinado momento? O ¿podrían surgir de un proceso adaptativo como resultado de la interacción en diferentes momentos de tiempo?

Este documento analiza a través de un modelo matemático, las estrategias individuales de los agentes kantianos y de Nash en un contexto de interdependencia o de decisión interactiva, aplicando la regla de reparto proporcional en juegos estáticos y dinámicos. La hipótesis propuesta consiste en que las estrategias kantianas surgen como un proceso adaptativo. Lo cual representa una innovación en la literatura sobre el tema, que tradicionalmente ha abordado el equilibrio kantiano como un precepto, norma o principio; que hace que los agentes contemplen desviarse de un perfil de acción, si quisieran que todos los demás se desvíen de la misma manera (Roemer 2014, 47).

Se mostrará que el análisis estático de la interacción entre agentes kantianos y de Nash, limita la solución del juego a estrategias reciprocas que bien podría justificarse de manera normativa; pero, una verdadera confianza y con ello la consolidación de una estrategia recíproca, debe construirse a partir de las experiencias pasadas; por lo que un análisis adecuado debe construirse sobre la base de equilibrios dinámicos. Se demuestra mediante estos últimos que en juegos repetidos los agentes Nash pueden adoptar estrategias de kantianas, lo cual indica que los equilibrios kantianos surgen como un proceso adaptativo.

La veracidad de la hipótesis se comprueba mediante el planteamiento de un caso de minería fluvial, en un río propiedad de toda una comunidad, dentro del cual existe un subconjunto de agentes con estrategias kantianas y existe otro subconjunto de agentes tipo Nash que sobreexplotan el recurso. En un primer momento se estudia por separado el equilibrio kantiano y el equilibrio de Nash para el modelo propuesto. Seguido se analiza el caso interactivo entre los dos tipos de agentes en juegos estáticos y dinámicos.

Esta metodología hace que el documento se estructure en 6 secciones incluidas esta introducción; en el segundo apartado se plantean los fundamentos filosóficos que sustentan el equilibrio kantiano. En la tercera sección se desarrolla el protocolo de optimización kantiano en sí. Seguidamente en el cuarto apartado se lleva a cabo el proceso de optimización para un agente tipo Nash, se hace un ejercicio de comparación entre los resultados de ambos casos, Acto seguido se realizan algunas distinciones entre equilibrio kantiano y equilibrio de Nash y sobre el final de la sección se realiza la interacción entre agentes kantianos y de Nash en un solo periodo, en la quinta parte del documento, con los resultados de las secciones precedentes, se desarrollan el juego dinámico y por último se presentan las conclusiones.

2. Fundamentos filosóficos del equilibrio kantiano

La presente sección se desarrolla con la finalidad de introducir algunas de las categorías filosóficas en las cuales se sustente el imperativo categórico y sobre el cual se basa la estrategia kantiana. Se considera que las nociones aquí definidas, darán claridad sobre el razonamiento que implementan los agentes de Kant en el contexto de interacción estratégica.

2.1. La voluntad pura e imperativo categórico

En el momento en que Kant, atendiendo a la posibilidad que tiene la metafísica para captar o conocer por medio de razonamientos puramente

apriorísticos las cosas en sí mismas, afirma que el empeño metafísico es imposible e ilegítimo; puesto que la aprehensión cognoscitiva no puede recaer sobre fenómenos que no son dados en la experiencia sensible, sino sobre objetos sometidos al espacio y al tiempo. Se ve en necesidad de indagar bajo que categorías la metafísica no queda inhabilitada (García 1992, p. 242).

Ahora, si bien el pensamiento kantiano ha demostrado la imposibilidad para llegar al conocimiento de las cosas en sí mismas por medio de la razón, demuestra también la imposibilidad de esa razón para dejar sin vigor las conclusiones metafísicas. Por tanto, la opción que le queda a la filosofía de Kant es, *examinar cuales es aquella vía que habilita la actividad humana para la aprehensión* de los objetos metafísicos. (García 1992, p. 242).

Para ello el autor recuerda que la personalidad humana consta tanto de una avidez por el conocimiento, como por actividades espirituales entre otros. La conciencia moral que implica la actividad espiritual lleva implícita un numero de preceptos sobre los cuales el hombre rige su actuar. Esta conciencia moral, es un hecho tan real como el acto mismo del conocimiento; contiene principios tan evidentes y claros como lo pueden ser los principios del conocimiento. A este conjunto de principios para establecer contacto con los objetos de la metafísica Kant le llama *Razón Práctica*. (García 1992, p. 243).

Se llama razón en cuanto a la aplicación de las cosas en sí, se llama razón, no dirigida a determinar a la esencia de las cosas, sino que es una razón aplicada a la conciencia moral, a hacer patente y manifiesta la razón adentro de los objetos de la metafísica. Por la vía de la razón práctica llega Kant a examinar los calificativos morales: (bueno, malo, debido e indebido entre muchos otros). Es preciso afirmar que estas etiquetas no pueden ser impuesta sobre objetos, no puede una cosa ser buena o mala; puesto que no puede verificar sus actos; esto solo le es posible al hombre, quien evalúa a la luz de sus acciones cuales pudiesen ser morales o inmorales. (Kant 1788; traducción de Dulce María Granja Castro, 2005, p. 52)

Los calificativos morales reposan no sobre lo que la persona hace sino sobre lo que quiere hacer; no es pues a la materia del acto a quien le corresponde ser

bueno o malo, sino a la voluntad misma del hombre, por lo que solo la voluntad del hombre, puede ser calificada como una voluntad buena o una mala voluntad. Entonces Kant evidencia que todo acto voluntario se presenta a la razón, a la conciencia en forma de un *imperativo*. Kant distingue entre imperativos categóricos e imperativos hipotéticos. Un ***imperativo es hipotético*** cuanto está supeditado a un condicionante, mientras, en el ***imperativo categórico*** el mandato no está sujeto a condición ninguna. (García 1992, p. 244).

Al respecto, Kant advierte que los imperativos de la moral se presentan sin condiciones. Cabría preguntarse qué sucede con aquellos mandatos que son calificados como buenos por que obedecen a la legalidad, es decir, cumplen con una orden conforme lo establece la ley. En este caso la etiqueta que lo tilda de bueno recae sobre la acción misma, pero recuérdese que se trata no del acto sino de lo que se quiere hacer. Por lo tanto, no basta que un acto se ajuste a la ley, para que sea un acto moral. Por lo que el acto moral se da en el instante mismo que antecede a la acción. Si un hombre ajusta sus actos conforme a la ley, pero lo hace porque teme al castigo o espera una recompensa, su conciencia íntima no es moral, el miedo al castigo o la esperanza en la recompensa menoscaba el mérito de la pureza moral. Por lo que un acto moral se verifica únicamente por que es el acto moral debido. “la buena voluntad no es buena por lo que efectué o realicé, no es buena por su adecuación para alcanzar algún fin que nos hayamos propuesto; es bueno solo por el querer, es decir, es buena en sí misma” (Kant 1785; traducción de García Morente, 2007, p. 21).

Se dirá entonces que, para Kant, la voluntad moral plena y pura, se da cuando las acciones estas únicamente regidas por auténticos imperativos categóricos. Así una voluntad pura y moral se construye, no en consideración al contenido empírico de ella, sino simplemente por respeto al deber. Kant aterriza esta idea del imperativo categórico a la moral pura, a la moral universal, en el siguiente aforismo “*obra de manera tal que el motivo que te lleve a obrar, puedas tu querer que sea una ley universal*” (Kant 1785; traducción de García Morente, 2007, p. 43).

Esta ley moral es el fundamento o la idea detrás del equilibrio kantiano. Si los sujetos orientan su conducta conforme a una racionalidad kantiana, que podría traducirse en que el agente trata a los demás como le gustaría que lo trataran a él, entonces se refiere al comportamiento de un jugador kantiano.

3. Protocolo de optimización Kantiana

Se empezará esta sección teniendo como objetivo analizar los resultados que se derivan en una economía de intercambio social bajo el imperativo categórico kantiano, en el que un agente típico asume que los otros agentes actúan como él y maximiza su función de utilidad bajo esta restricción. Cada jugador toma su decisión considerando que estas se universalizaran en los otros agentes y estas decisiones en su conjunto determinan la solución del juego.

El protocolo de optimización que un agente kantiano adopta, consiste en un tipo de estrategia cooperativa. Existe evidencia de que, en sociedades pequeñas de pescadores, de caza o mineros, en lugar de sobreexplotar los bienes de propiedad común; los miembros de la comunidad se organizan entre ellos para hacer un uso eficiente de sus recursos escasos. Entonces, este protocolo optimizador utiliza una estrategia diferente a la estrategia racional (la utilizada por el agente tipo Nash) y tiene como finalidad mantener el trabajo y el bienestar de la población. Así las cosas, el equilibrio kantiano resuelve la tragedia de los bienes de propiedad común (Roemer 2014, p. 47-48).

El imperativo categórico también tiene su arraigo en la cultura popular, pues en ella, ha hecho concurso entre las frases que pretender reprender o moralizar una acción, el consabido aforismo de: trata a los demás como te gustaría que trataran a ti. “También se podría ver el concepto kantiano como un modelo de pensamiento mágico. Un agente piensa: si amplio mi trabajo por un factor r . También lo harán todos los demás” (Roemer 2010, p. 1)

En la primera parte de esta sección, se ejemplificarán dos situaciones típicas de la teoría de juegos, a saber, *el dilema del prisionero* y *la batalla de los sexos*, los

cuales se analizará a la luz del protocolo de optimización kantiano. Se pretende con ello motivar la discusión, en un modelo bastante conocido, para ver la manera en la que opera las estrategias kantianas en relación a las estrategias racionales o de Nash. Seguidamente se formalizará el equilibrio kantiano destacando sus principales resultados. Es valioso revisar particularmente este tipo de juegos y en esta parte del documento, puesto que ello constituye el pilar del razonamiento para desarrollos posteriores de otros juegos que revisten una mayor complejidad y, además; porque brindan un abanico de situaciones que suceden con gran regularidad en la vida cotidiana.

3.1. El Dilema del prisionero

El siguiente ejemplo, retoma la matriz de pagos planteada en “Un Primer Curso de Teoría De Juegos” (Gibbons 1992, p. 2); con una pequeña variación en el orden en que aparecen las estrategias.

Considere un caso particular; sean dos delincuentes (J_1, J_2) ; los cuales son atrapados cometiendo un delito menor por el cual pueden recibir una sentencia de 1 año de prisión. Los oficiales de policía sospechan que los delincuentes han cometido un delito mayor cuyo castigo va de 6 a 9 años de cárcel. Los presos son puestos por separado, por lo que no pueden establecer contacto entre ellos; a cada uno se le propone un trato, si un preso confiesa y su cómplice no, se le perdona la pena y el cómplice recibe el castigo de 9 años. En caso de que ambos delincuentes confiesen, reciben la condena de 6 años. Si ninguno confiesa, ambos reciben la sentencia mínima de un año.

Con las estrategias de confesar (C), y no confesar (N), las acciones son $L^1 = \{C, N\}$ y $L^2 = \{C, N\}$, que también puede escribirse como $L^i = \{C^i, N^i\}$, que es el conjunto de acciones de todos los jugadores dado que i es idéntico. Ahora bien, el espacio de acciones es: $L^1 \times L^2 = \{(C, C), (C, N), (N, C), (N, N)\}$. Sea la matriz simétrica que recoge los pagos de los jugadores:

Tabla 3.1		J_2	
		C	N
J_1	C	$-6, -6$	$0, -9$
	N	$-9, 0$	$(-1, -1)^K$

Considerando que ambos jugadores tienen las mismas preferencias (es decir operan bajo el principio kantiano y todos tienen el mismo conjunto de estrategias). El jugador kantiano se pregunta ¿Cuál es la única estrategia que elegida por el conjunto de los agentes sería la más conveniente en términos de bienestar para toda la sociedad? Por tratarse justo de una única estrategia, en el dilema del prisionero, los agentes tiene la oportunidad de que ambos elijan C o que ambos jueguen D . Entonces al ser el equilibrio kantiano un conjunto de acciones basada en la reciprocidad, el agente kantiano elige su estrategia pensando que todos los demás jugadores se comportaran de la misma forma. En este orden de ideas, el equilibrio kantiano se obtendrá suponiendo que ambos jugadores obtienen los mejores pagos siguiendo la estrategia de reciprocidad. Entonces dada la función de pagos, $U^i(L^1, L^2)$, un equilibrio kantiano en su forma más simple es una estrategia L^* , tal que para todo i :

$$L^* = \arg \max_L U^i(L, L) \dots eq. 3.1$$

Sea $L_i^k = no\ confesar$ la estrategia kantiana del agente i ; entonces i juega L_i^k , si piensa que el jugador $i + 1$ va a jugar L_{i+1}^k . En otro caso juega L_i su mejor opción. Entonces, si los agentes tienen estrategias Kantianas la solución al dilema del prisionero es *(no confesar, no confesar)* en cuyo caso los pagos que recibe los agentes son $(-1, -1)$, que es el equilibrio Kantiano del juego.

Para ilustrar en más detalle, o establecer una interpretación alternativa, veamos algunos ejemplos del kantianismo cotidiano. Piense que el imperativo kantiano es una norma cooperativa, en cuyo caso la máxima y la ley universal que

se deriva de esta suposición, se transforma en: no confieso, si y solo si, resulta mejor para todos el que nadie confiese a que todos confesemos. Por ejemplo, la estrategia L^1 puede resultar: no confieso dado que $L^2, \dots, L^n$, han elegido no confesar, o confieso dado que $L^2, \dots, L^n$ confesaran.

En resumen, el equilibrio kantiano consiste en: el jugador i escoge la estrategia *confesar* o *no confesar* dependiendo de que todos los jugadores elijan la misma estrategia; o de manera alternativa, si se define $L^{-i} = (L^1, \dots, L^{i-1}, L^{i+1}, \dots, L^n)$, como el vector L sin su componente i – *esimo* (o lo que es lo mismo, el conjunto de estrategias que no incluyen las de i). La estrategia kantiana podría también representarse como: $L^i = \{C | L^{-i}: C\}$, y $L^i = \{N | L^{-i}: N\}$.

Comparando ambos escenarios, cada agente elige el nivel de esfuerzo que más le gustaría que eligieran todos los demás, en este caso (*no confesar*, *no confesar*); esta asignación es eficiente en el sentido de Pareto; puesto que ha sido “*posible mejora el bienestar de algunos agentes sin empeorar el de otros*”¹.

Recuerde que en el equilibrio de Nash la mejor estrategia es (*confesar*, *confesar*), el agente ha elegido su mejor respuesta considerando que los demás son al menos tan racionales como él. Así las cosas, el pensamiento del agente tipo Nash, se caracteriza por que el jugador persigue su bienestar propio, mientras que el equilibrio kantiano, el agente está motivado por la cooperación. Nótese que el agente kantiano decide la estrategia desde su propio punto de vista, no toma una decisión pensando en el bienestar ajeno (como el en caso de un agente con preferencias altruista), sino que, elabora su estrategia pensando en lo que su acción le pudiese causar, si todos los demás agentes adoptaran la misma estrategia, es decir, en la repercusión que sobre él tendrá su acción. Se volverá sobre estos aspectos más adelante cuando se analice la interacción entre agente kantiano y el agente tipo Nash.

¹ Tomado de Mas-Colell (1995, p. 307)

3.2. La Batalla de los sexos

“Un hombre y una mujer están tratando de decidir que harán esta noche. Ambos deben elegir entre ir a la ópera o un combate de boxeo. Ambos jugadores preferirán pasar la noche juntos, pero el hombre preferirá ir juntos en el boxeo, mientras que la mujer preferiría compartir, pero en la ópera” (Gibbons 1992, p. 11). Como lo constatan el comportamiento de los agentes, las preferencias en este caso no son idénticas; el pago es maximizado cuando los agentes comparten el evento, pero no cualquier evento, sino el que cada uno desea. La representación matricial del juego, se muestra en la tabla 3.2.

Tabla 3. 2		<i>Hombre</i>	
		<i>Ópera</i>	<i>Boxeo</i>
<i>Mujer</i>	<i>Ópera</i>	2,1	0,0
	<i>Boxeo</i>	0,0	1,2

Entonces, si la mujer juega *ópera*, dado que es un agente kantiano, lo hace pensando que el hombre elegirá *opera*, los pagos serán (2,1). Por otra parte, si la mujer elige *boxeo*, lo hará considerando que el hombre elegirá *boxeo*, en cuyo caso los pagos serán de (1,2). El hombre también aplica el mismo racionamiento durante la elección de sus estrategias, dado que ambos jugadores son idénticos, es decir los dos son kantianos. Por lo tanto, si la mujer tiene estrategias kantianas la solución al juego de la batalla de los sexos será (*Ópera*, *Ópera*), mientras que si el hombre es quien decide el resultado será (*Boxeo*, *Boxeo*). Generalizando el equilibrio kantiano en la batalla de los sexos en estrategia puras, consiste en elegir la estrategia que al otro agente le gustaría elegir.

Sin embargo, Roemer (2019, p. 27) afirma, que no existe para este juego la capacidad de establecer una “*intención conjunta*” en estrategias puras. Por lo tanto, la batalla de los sexos es un juego en donde los equilibrios kantianos no son eficientes en el sentido de Pareto. El autor agrega que una solución Pareto Eficiente,

puede encontrarse a través de estrategias mixtas, este tipo de equilibrios va más allá de la intención de este documento, por lo que se sugiere a los lectores interesados una bibliografía complementaria².

En comparación con el equilibrio de Nash del juego en estrategias puras, tanto (*Ópera, Ópera*) como (*Boxeo, Boxeo*), son equilibrios de Nash. Lo que sucede es que en el equilibrio kantiano tanto la mujer como el hombre, ofrecen asistir al evento de su interés, con menor probabilidad que en el equilibrio de Nash; en otras palabras, “se comprometen más con el otro en el equilibrio Kantiano simple que en el equilibrio de Nash” (Roemer 2019, p. 28). Entonces, para el juego de la batalla de los sexos con agentes kantianos, las estrategias de equilibrio, no conducen a un óptimo de Pareto, dado que el beneficio de uno de los agentes, mejora a expensas del sacrificio del otro. Por esta razón en el presente documento, el análisis se circunscribirá a aquellos juegos simétricos cuya diagonal común tienen equilibrios que no son iguales, tal como los que presentan el dilema del prisionero y se dejarán de lado los juegos que presentan una estructura como la que tienen la batalla de los sexos.

3.3. Equilibrio con estrategias Kantianas

Considera que en un momento específico el jugador interactúa con los demás agentes por única vez, y forma sus decisiones simultáneamente, por lo que en la práctica cada uno de los jugadores elige aquella estrategia que desearían que todos los demás también eligieran, es decir, aquel comportamiento que se universalizara en la población. Para cada uno de los jugadores es de conocimiento común las condiciones del juego y advierten cuales son las preferencias de los demás agentes. Entonces el escenario en que se desarrollara esta sección corresponde a la del juego estático con acciones simultáneas e información completa, para agentes kantianos.

² Roemer realiza un análisis detallado del juego de la batalla de los sexos en estrategias simples y mixtas, en su libro “How We Cooperate” 2019, para más información ver pag.26- 28.

Se ejemplifica una variante del problema asociado a la tragedia de los comunes, planteado inicialmente por Garrett Hardin en un artículo de 1968. Se trata de un modelo de minería fluvial, en donde las aguas del río que son de propiedad común, están disponibles a cualquier persona de la comunidad que desea realizar actividades de búsqueda de oro. En un principio cada minero destina una cantidad de mano de obra en horas a la pesquisa del mineral. Como la función de utilidad de los agentes se compone de la cantidad de oro extraída y el trabajo dedicado, el interés de cada uno de los miembros de la comunidad es maximizar su beneficio pasando tantas horas de búsqueda como sea posible. El problema es que, si cada uno de los miembros eventualmente incrementa el esfuerzo laboral dedicado a la minería, se presentaría un problema de congestión; por lo que, la comunidad entera ganaría en bienestar con una pequeña disminución en la cantidad de horas destinadas a la actividad minera.

Se definirá ahora los componentes que le son característicos a todo juego, a saber: los jugadores, el conjunto de estrategias y los pagos que recibe los jugadores.

Existe un conjunto k de i jugadores kantianos idénticos $\{J_1, J_2, \dots, J_i, \dots, J_k\}$; quienes tienen una dotación de tiempo $\bar{L}$. Los mineros (o jugadores) destinan una cantidad de trabajo a la búsqueda del mineral, para lo cual deciden cuanto trabajo realizar, es decir $L^i \in (0, \bar{L})$, con $i = 1, 2, \dots, k$. La cantidad de mineral extraído depende del esfuerzo laboral destinado, por lo que el vector de trabajo $L = (L^1, L^2, \dots, L^k)$, representa las estrategias de los i agentes.

Ahora, Sea $G = (L^S)^\alpha$; con $0 < \alpha < 1$; la función de producción de la forma potencia, que es *diferenciable, creciente con respecto al trabajo y con rendimientos marginales decrecientes*³. La suma de los esfuerzos laborales de todos los mineros está dado por, $L^S = \sum_{i=1}^k L^i$.

Sea u la función de utilidad, de la forma (x, L) donde x representa la cantidad de mineral extraído y L , el vector de trabajo realizado por todos los agentes;

³ Algunas de estas demostraciones han sido presentadas por Roemer 2010. Teorema 1 y Teorema 2.

Entonces para el individuo i las preferencias representadas por la función de utilidad $u^i(x, L^i)$, se escriben como sigue:

$$(x^i, L^i) = (L^1, L^2, \dots, L^k)^\alpha$$

Vinculándola la utilidad a la función de producción, existe un conjunto de funciones de pago $U^1, U^2, \dots, U^k$, de manera tal que:

$$U^i(L^1, L^2, \dots, L^k) = u^i((L^1, L^2, \dots, L^k)^\alpha)$$

Si θ es una regla de asignación definida por una correspondencia que mapea $R_n^+ \times G \rightarrow R_n^+$; como $L = (L^1, L^2, \dots, L^i, \dots, L^k)$ es el vector de esfuerzos entonces, entonces $\theta(L, G)$ es la asignación de producto del individuo bajo la regla de asignación proporcional. Que en la economía descrita, le permite al agente i mantener sus beneficios, como proporción de la cantidad de oro almacenado, en relación al esfuerzo total invertido, por lo que la regla de asignación viene dada por:

$$\theta^i(L^1, L^2, \dots, L^k) = \frac{L^i}{L^s}.$$

La distribución que propone esta regla, es denominada como asignación proporcional (Roemer 2014, p. 47), y está vinculado al equilibrio kantiano multiplicativo⁴. Con estos elementos, se define la función de pagos de la economía $e = (u, G, n)$ como:

$$U^i(L^1, L^2, \dots, L^n) = u^i(\theta^i(L^s)^\alpha - bL^i) \dots eq. 3.2$$

Donde b es la constante del costo del trabajo que realiza el minero, se asume que dicha constante es igual para todos los agentes y menor a uno ($b \leq 1$).

La propiedad que se esconde tras la idea del comportamiento kantiano, de optar por aquellas estrategias si y solo si se desea que todos los demás tomaran la misma estrategia, se representa por una constante que expande el trabajo por un

⁴ Roemer propone dos tipos de equilibrios kantianos: multiplicativo y aditivo. Este último ha sido planteado en "Theories of Distributive Justice", capítulo 6.

factor r en caso tal, de que el agente quisiera que todos los demás expandieran el suyo propio por el mismo factor, formalmente:

$$V^i(L^*) \geq V^i(rL^*); (\forall i = 1, 2, \dots, n) (\forall r > 0) \dots eq. 3.3$$

Donde $L^* = (L^{*1}, L^{*2}, \dots, L^{*k})$ es un perfil de esfuerzo, “tal que nadie prefiere que todos alteren su esfuerzo por el mismo factor no-negativo” (Roemer 2014, p. 47).

$$\max_r \left\{ \frac{rL^i}{rL^s} (rL^s)^\alpha - brL^i \right\} \Big|_{r=1} \dots eq. 3.4$$

La noción de optimización kantiana propuesta, en la ecuación *eq. 3.3* se aplica a la definición en *eq. 3.2* y se demuestra que la regla de asignación proporcional es Pareto superior. Se argumenta que cualquier equilibrio multiplicativo estrictamente positivo con respecto a la regla de asignación proporcional es Pareto eficiente en el dominio (Roemer 2014, p. 51).

De hecho, para una amplia literatura la estrategia kantiana es interpretada como un concepto normativo (Roemer 2014, p. 56), lo cual coincide precisamente con la idea que Kant hizo reposar sobre la metafísica de las costumbres, la metafísica entendida como el principio de lo que debe ser. Entonces, la universalización, o la transformación de la máxima en ley universal del que habla el imperativo categórico kantiano, que podía ser entendido como, un replicar el comportamiento de los demás, es r , que alternativamente se interpreta como un cambio equiproporcional en las contribuciones. Con $r \in [0,1]$, que en este caso se toma como igual a 1, lo cual es indicativo que el agente decide aplicar la estrategia de desvió.

Utilizando la condición de primer orden (C.P.O) de la *eq. 3.4*, se tiene que:

$$\frac{L^i(rL^s) - rL^i(L^s)}{(rL^s)^2} (rL^s)^\alpha + \frac{rL^i}{rL} \alpha (rL)^{\alpha-1} (L) - bL^i = 0, \forall i \dots eq. 3.5$$

Remplazando $r = 1$ y resolviendo para L^i , se obtiene:

$$L^* = \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \dots eq. 3.6$$

Dado que $L = \sum_{i=1}^k L^i = kL^i$ el esfuerzo laboral óptimo, para el agente representativo está determinado por:

$$L_k^{i*} = \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \dots eq. 3.7$$

Para valores, de $\alpha = 0.8$ y $b = 0.2$, el valor de esfuerzo laboral óptimo es $L_k^{i*} = 512$, entonces la *eq. 3.7* establece que la relación a la que los mineros están dispuestos a sacrificar una porción del mineral extraído por el esfuerzo laboral dedicado a la extracción $\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, es equivalente al punto óptimo de la posibilidad de producción L^{i*} , es decir, “la tasa marginal de sustitución entre el ingreso y el esfuerzo es, para cada agente, igual a la tasa marginal de transformación, que es exactamente la condición para la eficiencia de Pareto en una solución interior” (Roemer 2014, p. 48). El problema de congestión, es resuelto con la aplicación del equilibrio kantiano multiplicativo; puesto que, si los miembros de la comunidad emprenden una estrategia que incremente el esfuerzo dedicado a la búsqueda del mineral, la cantidad de oro que cada uno podría encontrar como proporción del esfuerzo laboral disminuiría, por lo que los mineros podrían mejorar su bienestar con una reducción adecuada de sus esfuerzos.

Con este resultado se demuestra que la asignación es eficiente en el sentido de Pareto, puesto que los agentes internalizan las externalidades negativas que se impondrían si la acción fuese universalizada. Este resultado se hará más evidente en la sección 4, cuando se compare con la solución de los agentes de Nash.

Ahora, La utilidad que recibe cada uno de los agentes:

$$u_k^{i*}(L^1, L^2, \dots, L^k) = \frac{1}{k} \left[k \left(\frac{1}{k} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \right]^{\alpha} - b \left(\frac{1}{k} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \dots eq. 3.8$$

En este caso, si el costo de producción aumenta, el esfuerzo por trabajador disminuye; lo mismo sucede con la utilidad, $\frac{\partial(u_k^{i*}(L^1, L^2, \dots, L^k))}{\partial b} < 0$, que también disminuye con el aumento del costo laboral. De igual manera, si el número de agentes aumenta el esfuerzo de cada uno de los mineros disminuye $\frac{\partial(u_k^{i*}(L^1, L^2, \dots, L^k))}{\partial k} < 0$.

Se ha dicho en esta sección, que existe un protocolo de optimización que implementado por los agentes conduce a una asignación Pareto dominante, que los jugadores que razonan según dicho protocolo se le denomina kantianos, y que en una sociedad compuesta exclusivamente por este tipo agentes los resultados maximizan el bienestar social. Las preguntas que caben hacerse son ¿qué sucedería si los agentes kantianos se enfrentan a otro tipo de jugadores?, ¿se sumarian todos a una estrategia en común?, ¿seguirá cada tipo de jugador con su estrategia inicial? O ¿podrán sacar ventaja o resultar perjudicados por la estrategia que implementa el otro tipo de agente? Se dará respuesta a estos interrogantes en la siguiente sección.

4. Optimización con estrategias racionales

Hasta el momento se ha versado exclusivamente en torno al equilibrio kantiano, para ello se acudió a explorar la forma en que los agentes, cuyo comportamiento se caracteriza por el imperativo categórico, eligen sus estrategias, que protocolo de optimización siguen dichos agentes, que resultados se obtiene y cuáles son los pagos a los que se llega. Es ahora momento de introducir una categoría de amplia difusión y bastante conocida en la teoría de juegos; se trata del equilibrio de Nash.

En esta *apartado* se plantean las estrategias del agente Nash en un juego estático con estrategias simultaneas e información completa. La sección 4.1 discute si el equilibrio de Nash logra o no una solución Pareto superior del juego. En la sección 4.2 se analiza aquellas situaciones en donde el equilibrio de Nash coincide

con el equilibrio Kantiano, en la sección 4.3 se desarrolla un juego, en donde interactúan agentes tipo Nash, con agentes kantianos y finalmente en la sección 4.4 se recogen los resultados tanto de la sección 3.3 como los de las secciones 4.1 y 4.3, en una matriz de pagos para un ejemplo en particular.

4.1. Equilibrio de Nash

Un equilibrio de Nash es una combinación de estrategias que compendia la mejor respuesta de todos y cada uno de los jugadores, de modo tal que no existen incentivos en estos para desviarse unilateralmente de su elección. Lo cual es posible, tras el análisis que cada jugador realiza al perfil de estrategias del resto de los jugadores, y en virtud del cual establece su mejor respuesta. Puesto que cada jugador realiza el mismo procedimiento, con lo cual cada uno logra su mejor respuesta, nadie tendrá incentivos para modificar su elección y por lo tanto se alcanza el equilibrio. Formalmente:

El perfil de las estrategias $l_1^*, \dots, l_n^*$, forman un **equilibrio de Nash** si, para todo jugador j , se cumple:

$$v_j(l_1^*, \dots, l_{i-1}^*, l_i^*, l_{i+1}^*, \dots, l_n^*) \geq v_j(l_1^*, \dots, l_{i-1}^*, l_i, l_{i+1}^*, \dots, l_n^*) \quad \forall j$$

Así las cosas, el concepto de racionalidad del agente tipo Nash está enmarcado por el comportamiento de un individuo que supone que los demás son al menos tan racionales como él.

Establecida la definición de equilibrio de Nash, resulta pertinente aterrizar esta noción sobre el problema de la minería fluvial que se planteó anteriormente. Hay n jugadores de Nash, cada uno con una función de utilidad cóncava v^i , definida sobre, x la cantidad de mineral extraído y L el esfuerzo laboral. Los jugadores elaboran su estrategia sobre la cantidad de trabajo destinada a la búsqueda del mineral, a su vez, la cantidad de oro en el río depende del tiempo destinado por los agentes a la extracción del mineral. La producción se definió mediante la función potencia $(L)^\alpha$, una función estrictamente cóncava y creciente en el esfuerzo, que transforma la sumatoria de los esfuerzos individuales L^s en producto el total $(L^s)^\alpha$.

También se ha propuesto una regla que asigna a cada individuo una cantidad de producto en función del vector de esfuerzo; $\Theta^j = \frac{L^j}{L^n}$, particularmente se trata de una regla de asignación proporcional, en la que cada minero mantiene la cantidad de mano obra destina a la búsqueda de oro. Suponga además, que existe un costo lineal de oportunidad por el esfuerzo dedicado a la extracción del oro, representado mediante $c_i(l_i) = bl_i$. Entonces la función de pago del juego para el agente j de Nash está dada por.

$$V^i(L^1, L^2, \dots, L^n) = \Theta^j(L^s)^\alpha - bL^j \dots eq. 4.1$$

El problema de optimización del agente de Nash, se resuelve considerando la elección que maximiza su utilidad dado la elección de los demás jugadores:

$$\max_{L^j} \left\{ \frac{L^j}{L^n} (L^s)^\alpha - bL^j \right\} \dots eq. 4.2^5$$

La C.P.O del problema anterior está dado por

$$\frac{L^{-j}}{L} (L)^\alpha + \alpha \frac{L^j}{L} (L)^{\alpha-1} = b \dots eq. 4.3$$

Donde $L^{-j} = \sum_{i \neq j}^n L^i$. Puesto que se trata de un jugador representativo, todos agentes se comportan de igual manera $L = \sum_{j=1}^n L^j = nL^j$, con lo cual $eq. 4.3$ queda:

$$\frac{(n-1)L^j}{nL^j} (nL^j)^\alpha + \alpha \frac{L^j}{nL^j} (nL^j)^{\alpha-1} = b \dots eq. 4.4$$

Resolviendo para L^j , se tiene que el esfuerzo óptimo del agente tipo Nash es:

$$L_n^{i*} = \left(\frac{n-1+\alpha}{n^{2-\alpha}b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \dots eq. 4.5$$

Si se compara este resultado con el obtenido en la ecuación $eq. 3.7$, se observa que $L^{j*} > L^{i*}$, por ejemplo para un valor de $\alpha = 0.8$ y $b = 0.2$, el esfuerzo

⁵ La condición de primer orden está dada por:

$$\frac{\partial V(\Theta, L)}{\partial L^i} = 0 \rightarrow \frac{\partial V^i}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial L^i} + \frac{\partial V^i}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial L^i} - \frac{\partial}{\partial L^i} bL^i = 0$$

óptimo del agente kantiano $L^{i*} = 512$ unidades de esfuerzo laboral, mientras que para un agente de Nash $L^{j*} \approx 923$ unidades de esfuerzo laboral. Entonces, la *eq. 4.5* indica que cada minero sobreexplota el recurso; dado que no tiene en cuenta el hecho de que su trabajo contribuye al mal público; cada uno calcula su esfuerzo laboral suponiendo que los otros agentes mantienen fijo su esfuerzo. Este resultado genera una externalidad, que deriva en un problema de congestión. También se puede observar que el nivel de esfuerzo laboral óptimo L^{j*} disminuye con el aumento de la cantidad de mineros que explotan el recurso.

Obsérvese que de *eq. 4.5*

$$\frac{\partial L_n^{i*}}{\partial b} = -\frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{n-1+\alpha}{n^{2-\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{b^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}} \dots eq. 4.6$$

Entonces a media que el costo laboral b aumenta, el esfuerzo laboral óptimo L^{j*} del agente de Nash disminuye, por lo que los mineros dedicarían menos tiempo a la búsqueda del mineral. Pero como el nivel de esfuerzo elegido por el agente de Nash es mayor al esfuerzo socialmente óptimo, también sucederá que los aumentos de b conducirán el esfuerzo del agente de Nash hacia el nivel de esfuerzo socialmente óptimo.

Los pagos que recibe el agente de Nash, viene dada por la función V :

$$V_j(L^1, L^2, \dots, L^n) = \frac{1}{n} (nL^{j*})^\alpha - bL^{j*} \dots eq. 4.7$$

Remplazando *eq. 4.5* en *eq. 4.7* se tiene:

$$v_n^{i*}(L^{1*}, L^{2*}, \dots, L^{n*}) = \frac{1}{n} \left(n \left(\left(\frac{n-1+\alpha}{n^{2-\alpha}b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \right)^\alpha - b \left(\left(\frac{n-1+\alpha}{n^{2-\alpha}b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \dots eq. 4.8$$

La utilidad depende del efecto que se tenga del nivel de trabajo óptimo, del costo laboral y del número de agentes. Por ejemplo, si el costo de producción aumenta, el esfuerzo por trabajador disminuye, $\frac{\partial v_n^{i*}(L^1, L^2, \dots, L^n)}{\partial b} < 0$ tal como sucede en

el equilibrio kantiano. Por otra parte, si el número de agentes aumenta el esfuerzo de cada uno de los mineros, disminuye. Al igual que en el equilibrio kantiano, la utilidad disminuye cuando el número de minero aumenta $\frac{\partial(v_n^{i*}(L^1, L^2, \dots, L^n))}{\partial n} < 0$.

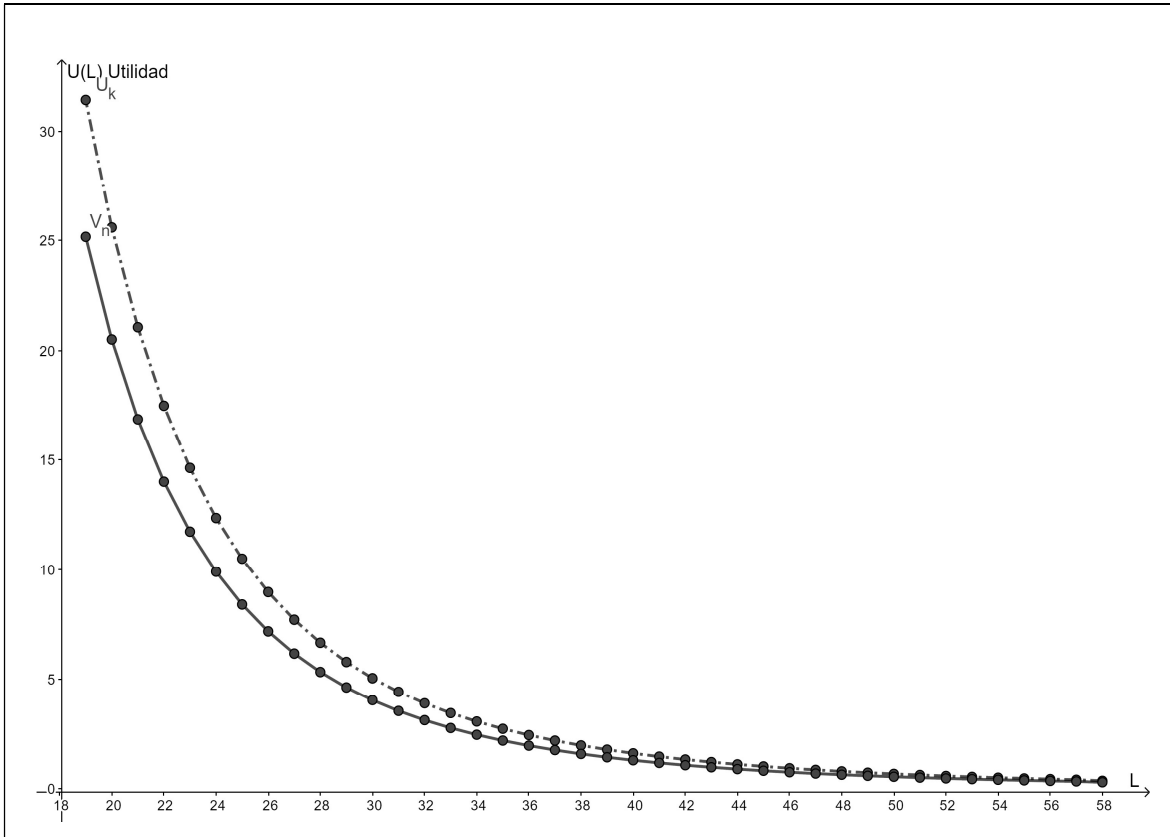


Figura 4.1. Curva de Utilidad Agente Kantiano y Agente Nash. En la figura se grafica la utilidad con respecto al esfuerzo laboral, a medida que el costo de trabajo b aumenta, para un valor fijo $\alpha = 0.8$. Se observa que a medida que b aumenta la utilidad se hace más chica. Además, se ilustra como la utilidad recibida por los agentes kantianos (líneas punteada), es mayor a la utilidad que reciben los agentes de Nash (línea solidada).

Para valores de $\alpha = 0.8$ y $b = 0.2$ la utilidad del agente tipo Nash es $v_n^{i*} = 20.5$ mientras que para el agente kantiano es $u_k^{i*} = 25.6$. Por lo tanto, la solución de Nash del juego, en la que cada agente propone un esfuerzo laboral es Pareto inferior, dado que existen otras opciones que mejoran el bienestar de todos los

jugadores, de hecho, uno de los problemas que plantea el equilibrio de Nash, es que no necesariamente conduce a situaciones eficientes en el sentido de Pareto, la figura 4.1 ejemplifica esta situación. Entonces, el equilibrio de Nash es dominado en términos de eficiencia por el equilibrio kantiano, esto último, en virtud de que el imperativo categórico obliga al agente kantiano a interiorizar la externalidad que su comportamiento les impondría a los todos los agentes, incluyéndose, cuando su acción se universalice, en los casos en que la función es cóncava (Roemer 2014, p. 48).

4.2. Coincidencias entre la optimización Kantiana y optimización de Nash⁶

Para dar inicio a esta sección, sería útil preguntarse, ¿si el equilibrio kantiano podría ser, un tipo de equilibrio de Nash, donde los agentes tiene preferencias no clásicas? Es decir, ¿se trata el equilibrio kantiano de una propuesta de optimización tipo Nash, pero, donde los participantes del juego tienen presente los vínculos sociales entre sí y de acuerdo con ellos elaboran sus estrategias? Lo cual podría indicar que los individuos toman en cuenta las características personales de aquellos agentes con quienes interactúan en los mercados, entablando así vínculos que van más allá de las relaciones estrictamente económicas.

Los agentes que optimizan según el protocolo de Nash tal como se estableció anteriormente, lo hacen delimitando el campo económico de lo no económico, por lo que los jugadores se desvinculan de cualquier reflexión acerca de amistad, lealtad, empatía, entre otros (Wicksteed 1967, p. 179). Lo que esta sección pretende abordar, se relaciona con aquellos comportamientos que no son fácilmente identificables con los de un agente tipo Nash, es decir, que tienen presente elementos no económicos durante la elaboración de estrategias, por lo que se podría considerar que tienen preferencias exóticas, pero que siguen el protocolo de optimización de Nash. Justamente este tipo de jugador es el que se desea comparar con el agente kantiano para determinar si son uno y el mismo. Por lo que se

⁶ En esta sección se sigue el razonamiento utilizado por Roemer: "Kantian optimization. A microfoundation for cooperation" apartado 4: "Two posible objections"

consideraría que el protocolo kantiano, no es otra cosa que una especie de preferencias exóticas o preferencias no clásicas, como las altruistas, donde el agente no tiene un interés propio y son motivados por la intención de mejorar el bienestar de los demás individuos.

Para dar respuesta al interrogante considere de nuevo la función potencia; Suponga $n = 2$, y que ambos agentes tienen las mismas preferencias, entonces la función de utilidad agregada está dada por:

$$v(u^1, u^2) = u^1(x^1, L^1) + u^2(x^2, E^2). \quad eq. 4.8$$

Ahora escribiendo la función de pagos, según la regla de asignación proporcional y teniendo presente que cada jugador decide su estrategia, es decir, elige su nivel de esfuerzo, se tiene que:

$$V^i(L^1, L^2) = \frac{L^1}{L^s} (L^s)^\alpha - b(L^1) + \frac{L^2}{L^s} (L^s)^\alpha - b(L^2). \quad eq. 4.9$$

La C.P.O del equilibrio de Nash, para el jugador 1 (para el jugador 2 aplica el mismo procedimiento), está dado por:

$$\frac{\partial V(L^1, L^2)}{\partial L^1} = 0 \rightarrow L^s = \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad eq. 4.10^7$$

La *eq. 4.10*, representa el equilibrio de Nash de la asignación proporcional, “que es el vector de los niveles de esfuerzo de manera única con todas las asignaciones eficientes de Pareto de la economía” (Roemer 2014, p. 50). Esto es

⁷ Recuerde que $L^s = \sum L^i = \sum_{j=1}^n L^j = L^i + \sum_{j \neq i}^n L^j$, por lo que $\frac{\partial L^s}{\partial L^1} = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(L^1, L^2)}{\partial L^1} &= 0 \\ \left[\left(\frac{(1)(L^s) - (L^1)(1)}{(L^s)^2} \right) (L^s)^\alpha + \frac{L^1}{L^s} \alpha (L^s)^{\alpha-1} (1) - b + \left(\frac{0(L^s) - L^2(1)}{(L^s)^2} \right) (L^s)^\alpha + \frac{L^2}{L^s} \alpha (L^s)^{\alpha-1} (1) \right] &= 0 \\ \left[\left(\frac{(L^s) - (L^1)}{L^s} \right) (L^s)^\alpha + \frac{L^1}{L^s} \alpha (L^s)^{\alpha-1} - b - \left(\frac{L^2}{L^s} \right) \frac{G(L^s)}{L^s} + \frac{L^2}{L^s} \alpha (L^s)^{\alpha-1} (1) \right] &= 0 \\ \left(1 - \left(\frac{L^1 + L^2}{L^s} \right) \right) \frac{(L^s)^\alpha}{L^s} + \left(\frac{L^1 + L^2}{L^s} \right) \alpha (L^s)^{\alpha-1} = b &\rightarrow \left(1 - \left(\frac{L^s}{L^s} \right) \right) \frac{(L^s)^\alpha}{L^s} + \left(\frac{L^s}{L^s} \right) \alpha (L^s)^{\alpha-1} = b \\ (1 - 1) \frac{(L^s)^\alpha}{L^s} + (1) \alpha (L^s)^{\alpha-1} = b &\rightarrow L^s = \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \end{aligned}$$

precisamente el equilibrio kantiano multiplicativo demostrado en *eq.3.6*, que es eficiente en el sentido de Pareto. ¿podría indicar *eq.4.10* que el equilibrio de Nash es equivalente al kantiano con preferencias exóticas? La respuesta, aunque afirmativa, no es del todo cierta, esto sucede porque el resultado no es generalizable, puesto que la equivalencia se da solo para ciertos valores; más precisamente, la asignación eficiente que hace equivalente al protocolo de optimización kantiano con el protocolo de optimización de Nash, solo es posible en aquellos casos en que los niveles de esfuerzo son idénticos entre agentes.

Para comprobar que la anterior afirmación sea cierta, considere el caso en que la función de utilidad para el primer jugador sea 2, por lo que se tiene $v(u^1, u^2) = 2(u^1(x^1, L^1)) + u^2(x^2, E^2)$, en esta situación el equilibrio de Nash no es Pareto eficiente, tal como lo evidencia la C.P.O de la función de pagos:

$$L^s = \left(\frac{\left(1 - \frac{L^1}{L^s}\right) + \alpha \left(\frac{L^1}{L^s} + 1\right)}{2b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \dots eq.4.11$$

En conclusión, los equilibrios kantianos son en sí un protocolo de optimización, un tipo de comportamiento en que los agentes tienen un sentido de la moral; cuya lógica lleva implícita un sentimiento de solidaridad o de justicia. Si bien este sentido de la moral puede modelarse como una preferencia, no es cierto, que se traten de una forma particular de optimización de Nash en donde los agentes tienen preferencias exóticas o no clásicas.

4.3. Interacción entre jugadores kantianos y jugadores *Nash*

Hasta este momento, se ha asumido o bien que los agentes de un juego son todos del tipo Nash o bien que se caracterizan por ser jugadores kantianos; en la realidad sucedería que no todos los agentes pertenecen a un grupo característico o lo que es lo mismo, no todos los agentes se comportan de igual manera. En este trabajo se asumirá que, en el juego interaccionan agentes kantianas y no kantianos. Se Tomará como agentes no kantianos a los jugadores tipo Nash, que como se ha

indicado anteriormente, en equilibrio, ninguno de los agentes tendrá incentivos para desviarse, por lo que nadie puede mejorar su beneficio, suponiendo que todos los demás agentes mantienen fija su elección.

Regresando sobre el modelo de minería fluvial, considere que se trata de la comunidad en sus primeros años de asentamiento, en el que existe un número m reducidos de mineros, de los cuales un subgrupo N_j con $j = 1, 2, \dots, n$ son agentes de Nash y otro subconjunto de agentes kantianos K_i con $i = n + 1, n + 2, \dots, n + k$. El esfuerzo laboral total L de la comunidad viene dado por $L(k, m) = \sum_{j \in N} l_j(k, m) + \sum_{i \in K} l_i(k, m)$. La función de extracción minera como ya se indicó, es aquella de la forma potencia $(L(k, m))^\alpha$, la función de utilidad viene dada por:

$$V_{nk} = \frac{L(k, m)}{L^s(k, m)} (L(k, m))^\alpha - b(L(k, m)). \quad eq. 4.12$$

Antes de seguir adelante, resulta conveniente mencionar que se distinguen dos tipos de equilibrios en juegos Kant-Nash, se trata del *equilibrio exclusivo de Kant-Nash* y el *equilibrio inclusivo de Kant-Nash*; en el primero de estos un jugador “contempla si desvía su estrategia por un factor $r > 0$, considerando como alternativa contra fáctica que el nivel de acción de todos los demás agentes, excepto los de Nash, también se ajustaran por el mismo factor r . En contraste en el equilibrio inclusivo Kant-Nash, se supone que todas las empresas, incluidas las Nash se ajustan por el mismo factor r ” (Van Long 2016, p. 193). Se implementará en este documento el marco que provee el equilibrio kantiano *inclusivo*, por lo que el vector de esfuerzos será:

$$\mathbf{L} = (L_1^N, L_2^N, \dots, L_n^N, L_{n+1}^K, L_{n+2}^K, \dots, L_{n+k}^K)$$

Donde N y K , representan las dotaciones de esfuerzo del agente de Nash y de Kant Respectivamente. Se comenzará revisando el proceso de optimización para el jugador de Nash, cuya mejor elección resuelve:

$$\max_{L^j} \left\{ \frac{L^j}{L^i + L^j} (L^i + L^j)^\alpha - bL^j \right\} \dots eq. 4.13$$

Se asume que el juego es de información perfecta, es decir que el agente de Nash, conoce que el esfuerzo laboral del agente kantiano esta fijo en $L^{i*} = \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, así la C.P.O, está dada por:

$$\left(\frac{1}{m} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + L^j \right)^{\alpha-2} \left(\frac{1}{m} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \alpha L^j \right) = b \dots eq. 4.14$$

Considere para simplificar el caso, en que solo existe un agente kantiano y un agente de Nash, por lo que $m = 2$, entonces, la eq. 4.14, queda:

$$\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + L^j \right)^{2-\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \alpha L^j \right)}{b} \dots eq. 4.15$$

La ecuación 4.15, aunque difícil de resolver para L^j , puede resolverse empleando la aproximación por series de Taylor:

$$\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + L^j \right)^{2-\alpha} \approx \left(\left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{2-\alpha} + (2-\alpha) \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(L^j - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \dots eq. 4.16$$

Igualando eq. 4.15 con eq. 4.16 y resolviendo para L^j , se obtiene:

$$L_{n\bar{k}}^* = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \dots eq. 4.17$$

Tenga en cuenta que en eq. 4.16, se consideró el hecho, que el agente de Nash tiene disponible entre sus opciones, la elección de esfuerzo laboral optima L^{j*} y todas las estrategias que estén por debajo de esta, entre ellos, el esfuerzo laboral óptimo del agente kantiano. Lo cual equivale a decir que el agente de Nash puede elegir cual estrategia menor o igual a su esfuerzo laboral óptimo. Por otra parte, en la ecuación 4.17 se puede validar que $L^{i*} < L_{n\bar{k}}^* < L^{j*}$

La función de pagos para el agente de Nash, en el juego en donde interactúan agentes kantianos y agentes tipos de Nash, dado que el agente kantiano ha elegido su estrategia $\bar{k}$, está dado por:

$$V_{n\bar{k}}(L^i, L^j) = \frac{L^j}{L^i + L^j} (L^i + L^j)^\alpha - bL^j \dots eq. 3.18$$

En el caso de $m = 2$, las estrategias del jugador kantiano y Nash están dadas por *eq. 3.7* y *eq. 4.17*, remplazándolas en *eq. 4.18*, se obtiene la utilidad del agente de Nash dado la estrategia fija del jugador kantiano.

$$V_{n\bar{k}}(L^i, L^j) = \frac{\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) + \left(\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^\alpha - b \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \dots eq. 4.19$$

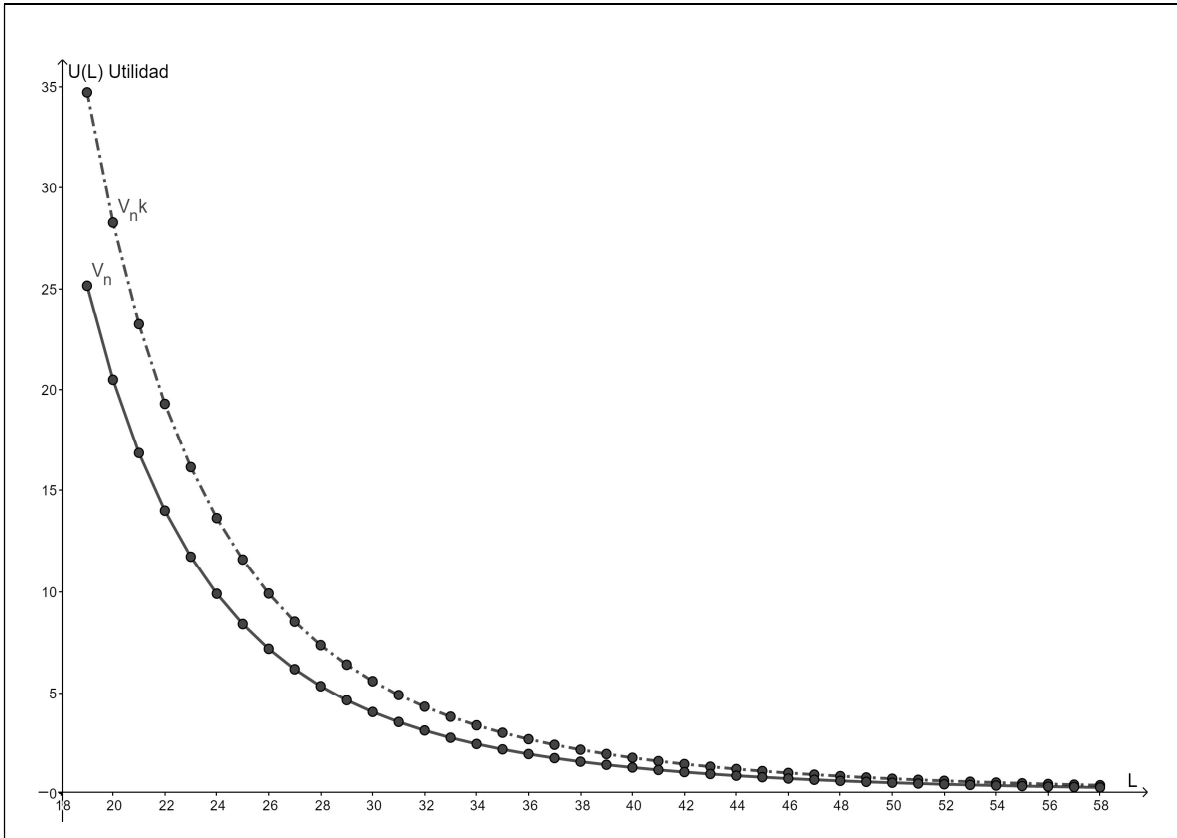


Figura 4.2. Curva de Utilidad agente de Nash Interacción Kant-Nash. En la figura se muestra que la utilidad recibida por los agentes de Nash cuando interactúa con un agente kantiano (línea punteada), es mayor a la utilidad que reciben los agentes de Nash (línea solidada).

La figura 4.2 muestra que $V_{n\bar{k}}(L^i, L^j) > V_j$; es decir, la utilidad que recibe el agente de Nash cuando interactúa con un agente kantiano, es mayor a la utilidad que recibe en comparación a la que se obtiene cuando el juego se compone únicamente de agentes de Nash. Una posible explicación radica en, que los agentes de Nash acaparan aquella parte del esfuerzo laboral que los agentes kantianos no realizan, puesto que el imperativo categórico, les conduce a estos últimos a contemplar el efecto de su acción sobre los demás y sobre sí mismo.

Se procederá ahora a trabajar sobre el equilibrio Kant-Nash cuando el agente de Nash ha elegido su estrategia. Por tratarse de un equilibrio kantiano inclusivo, el agente kantiano maximiza suponiendo que el agente de Nash puede desviarse por un factor igual a r , por lo que el proceso de maximización del agente kantiano, será:

$$\max_r \left\{ \frac{rL^i}{rL^i + rL^j} (rL^i + rL^j)^\alpha - brL^i \right\} \Big|_{r=1} \dots eq. 4.20$$

Remplazando $r = 1$, la C.P.O, queda:

$$\alpha(L^i + L^j)^{\alpha-1} = b \dots eq. 4.21$$

Para este caso la estrategia del agente de Nash es fija, remplazando la eq. 4.5 en eq. 4.21 y resolviendo para L^i , el esfuerzo óptimo del agente kantiano, cuando interactúa con un jugador tipo Nash, viene dado por:

$$L_{\bar{n}k} = \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - \left(\frac{1+\alpha}{2^{2-\alpha}b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \dots eq. 4.22^8$$

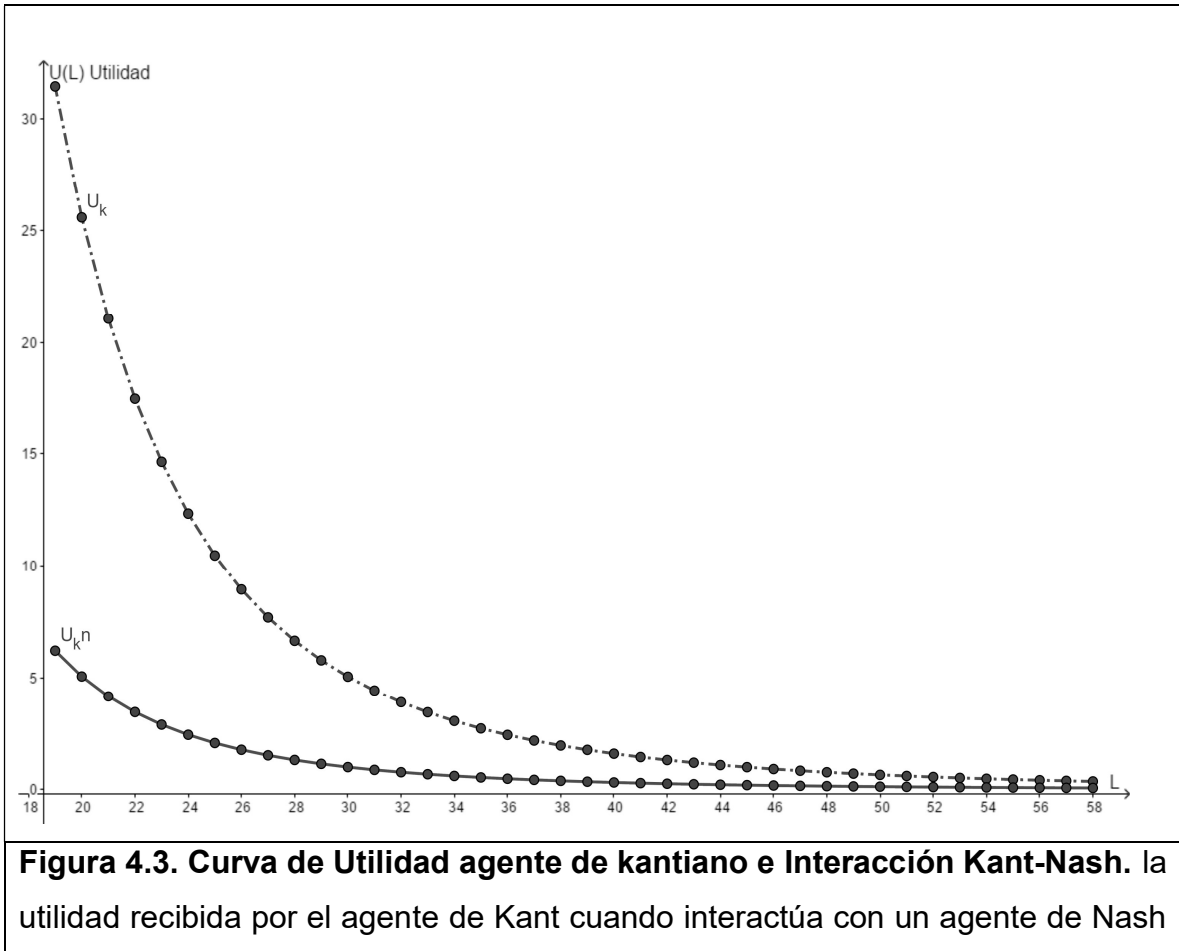
Es decir, la diferencia entre el esfuerzo total kantiano y el esfuerzo realizado por agente representativo de Nash. Por otra parte, la función de pagos, para el juego en donde interactúan agentes kantianos y agentes tipo Nash, dado que el agente Nash ha elegido su estrategia $\bar{n}$, está dado por:

⁸ Adviértase que esta solución solo tiene sentido cuando $\left(\frac{\alpha}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > \left(\frac{1+\alpha}{2^{2-\alpha}b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, es decir cuando el esfuerzo es positivo, no habría ninguna razón para suponer que un agente realiza un esfuerzo negativo, la interpretación en dicho caso, es que al jugador se esfuerza en deshacerse del oro.

$$U_{\bar{n}k} = \frac{L^i}{L^i + L^j} (L^i + L^j)^\alpha - bL^i \dots eq. 4.23$$

Entonces con $k = n = 2$, las estrategias del jugador kantiano y Nash dadas por eq. 4.3 y eq. 4.22, son remplazadas en eq. 4.23, con lo cual se obtiene la utilidad del agente de Kant dada la estrategia fija del jugador de Nash.

$$U_{\bar{n}k} = \frac{\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - \left(\frac{1+\alpha}{2^{2-\alpha}b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - \left(\frac{1+\alpha}{2^{2-\alpha}b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) + \left(\frac{1+\alpha}{2^{2-\alpha}b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \left(\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - \left(\frac{1+\alpha}{2^{2-\alpha}b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) + \left(\frac{1+\alpha}{2^{2-\alpha}b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^\alpha - b \left(\frac{1+\alpha}{2^{2-\alpha}b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \dots eq. 4.24$$



(línea sólida), es menor a la utilidad que reciben los agentes kantiano (línea punteada).

En la figura 4.3 se muestra que la utilidad $U_{\bar{n}k} < U_i$. Dado que el agente de Nash, está realizando mayor esfuerzo del socialmente óptimo, entonces la utilidad del agente Kantiano disminuye, en relación con el equilibrio donde solo existen agentes kantianos. El bienestar social también es menor, ya que la ganancia obtenida por el agente de Nash provoca una mayor pérdida en el agente Kantiano. Es decir, el esfuerzo adicional que realiza el agente de Nash reduce la productividad marginal, así como la proporción que le corresponde al agente Kantiano, mientras que el costo de producción se mantiene constante.

4.4. Matriz de pagos del juego

Recogiendo las principales conclusiones de las secciones precedentes, se elabora la siguiente matriz de pago, la cual resume la utilidad tanto del agente kantiano como del agente de Nash, cuando juegan entre si y cuando interactúan el uno con el otro, el caso particular en que $n = k = 2$, $\alpha = 0.8$ y $b = 0.2$.

Tabla 4. 1

		J_j	
		<i>kantiano</i>	Nash
J_i	<i>kantiano</i>	(25.6, 25.6)	(5.1, 28.3)
	Nash	(28.3, 5.1)	(20.5, 20.5)

Observe que el equilibrio de Nash en estrategias puras consiste en que ambos jugadores se comporten como agentes de racionales (Nash). Pero la asignación Pareto superior se encuentra cuando ambos jugadores se comportan como agentes kantianos. Basta con sumar las utilidades de cada celda para detallarlo (ver tabla 4.2).

Tabla 4. 2		J_j	
		<i>kantiano</i>	Nash
J_i	<i>kantiano</i>	51.2	33.4
	Nash	33.4	41

En esta sección se estudió aquel tipo de juegos en donde agentes kantianos y no kantianos comparten escenario, se determinó que la solución kantiana maximiza el bienestar social en comparación con el equilibrio de Nash; pero también se encontró que los agentes de Nash, podría hacer un mayor esfuerzo cuando actúan con agentes kantianos, de modo tal que acaparen aquella parte del esfuerzo laboral total que los agentes kantianos, en virtud del imperativo categórico dejan de realizar.

El hecho de que exista una solución que mejora los pagos de la sociedad no necesariamente ha de ser la solución elegida por todo el grueso de la población. Bajo estas circunstancias la literatura aboga por un equilibrio kantiano como una solución normativa, que se reproduciría en la sociedad solo si existen un precedente que regle el comportamiento de los agentes (Roemer 2014, p. 56). Al respecto podría pensarse esta norma como un tipo de castigo, en que el agente kantiano universaliza su acción de manera negativa, es decir, una suerte de estrategia castigo tipo ley del talión, en donde le agente kantiano decide pagar con la misma moneda. Por otra parte, algunos autores garantizan la existencia del comportamiento en una sociedad asumiendo la suposición de que “en situaciones reales, las personas a menudo no siguen estrategias egoístas, porque cada uno se ha preguntado a sí mismo, que tipo de preferencia le gustaría que tuviera el otro jugador y en cierta forma el equilibrio kantiano supone esa consideración” (Van Long 2016, p. 200).

Sea mediante una idea normativa o una situación en donde el agente paulatinamente desiste de la estrategia egoísta, el equilibrio kantiano, evoca el principio de solidaridad y confianza en el sentido más fuerte del dilema del

prisionero, no obstante, “La confianza, debe construirse a partir de la experiencia pasada. Por lo tanto, no se pretende que sea racional en un verdadero juego de un solo tiro hacer la pregunta kantiana” (Romer 2019, p. 4). Es por ello que en próximas secciones se abordara el tema de los juegos dinámicos.

5. Interacción Kant-Nash en juegos dinámicos

Hasta el momento se ha asumido que, en el juego los agentes se encuentran por vez primera y realizan una sola interacción, lo que recibe el nombre de juegos estáticos con movimiento simultáneos. En la práctica sucede que son más probables aquellos encuentros en donde los agentes interactúan en más de una ocasión, y las decisiones que toman en cada uno de los periodos depende de la elección del otro jugador en el momento inmediatamente anterior. Este tipo de comportamiento fue reseñado en la década de los 30's por el economista Heinrich Freiherr von Stackelberg, quien, observando el comportamiento de las industrias, advirtió que en los mercados existía una empresa líder quien tomaba en un primer momento sus decisiones, mientras que las demás empresas permanecían atentas a la decisión del líder y posterior a ello tomaban su decisión. Este tipo de comportamiento, fue definido bajo el nombre de juegos dinámicos.

Si bien esta dinámica de *Líder-Seguidor* propuso un primer marco de referencia, tan bien existen modelos en donde los agentes tomando de manera simultaneas sus decisiones interactúan en múltiples ocasiones; este tipo de juego recibe el nombre de repetidos con información completa pero imperfecta, a partir de este marco conceptúa se abordará la presente sección.

Considere de nueva la motivación inicial que problematiza el uso de los bienes de propiedad común, se trata de la tragedia asociada a la explotación aurífera en un rio propiedad de toda comunidad. Como es de esperarse, los agentes se encontrarán en diferentes momentos durante un periodo de tiempo (por lo menos hasta que el recurso se agote); y destinarán una cantidad de mano de obra a la búsqueda del mineral. El tema de relevancia aquí, es la credibilidad vinculada a la

reputación del agente. Piense, por ejemplo, que, si un miembro de la comunidad incrementa eventualmente durante el primer periodo el esfuerzo laboral dedicado a la minería, los demás mineros que tiene plena información de lo que sucede en el río y que han observado el movimiento de todos los demás, deciden también incrementar el esfuerzo laboral dedicado a la explotación del recurso. Suponga ahora que el comportamiento en el primer periodo para determinado agente está condicionado por una advertencia de los demás jugadores, quienes siendo conscientes de que el oro en el río es un mineral no renovable y que el stock del recurso disminuye con cada extracción realizada, amenazan con aumentar su esfuerzo el doble de horas que el agente líder dedique a la búsqueda del mineral. El punto aquí es el siguiente, si el agente líder considera que se trata, o no de una amenaza creíble decidirá moderar su esfuerzo o no moderarlo; en el último caso la comunidad terminaría enfrentada a un problema de congestión.

Ahora, no es que el agente kantiano realice una amenaza propiamente dicha, simplemente adopta una estrategia, que consiste en pagar con la misma moneda.

El problema con los juegos estáticos que se trataron en la sección 3 y 4, es que no tiene en cuenta la noción de amenazas creíbles, por lo que se hace necesario la introducción de un nuevo escenario dinámico y de un equilibrio acorde con esta noción; esta idea se conoce por el nombre de *equilibrio perfecto en subjuegos* y robustece el concepto de *equilibrio de Nash en estrategias puras*. Un equilibrio es perfecto en subjuegos, si las estrategias de los jugadores constituyen un equilibrio de Nash en cada subjuego (Osborne 1994, p. 97).

El objetivo de esta sección es determinar si en juegos repetidos, en los que agentes kantianos y de Nash interactúan, existen motivaciones en los jugadores de Nash para adoptar estrategias kantianas. Es decir, ¿podrían las amenazas creíbles, las estrategias castigo y las promesas de un sacrificio de bienestar en el presente a cambio de un mayor beneficio futuro, modificar el comportamiento de los agentes, y de tal manera obtener resultados diferentes a los conseguidos en estrategias puras, para juegos estáticos con decisiones simultaneas? Además, ¿podría la

existencia de un agente kantiano inducir alguna modificación en el agente de Nash de manera tal que este último se preocupe por el bienestar social?

Antes de responder a la pregunta, esta sección aplicara la dinámica en teoría de juegos al marco teórico desarrollado en las precedentes secciones. Se busca con ello comprender la interacción entre agentes kantianos y agentes tipo Nash, cuando se estos encuentran en diferentes momentos del tiempo. Para tal fin se estudiará en 5.1 un modelo de juego repetido ínfimamente, con información completa pero imperfecta y también se recurrirá en el apartado 5.2 a las investigaciones de Kreps, Milgrom, Rober y Wilson quienes han demostrado que en modelo de reputación para el dilema del prisionero repetido finitas veces, los agentes pueden elegir la estrategia cooperativa que maximiza el bienestar social en los periodos que no están tan cerca del final (Kreps et al. 1982, p. 246); y por ultimo se encontraran unos comentarios finales.

5.1. Juegos dinámicos infinitos

Para empezar a dar forma a la respuesta que busca este aparatado, considere que los agentes toman sus decisiones en cada etapa de manera simultánea, estas decisiones se elaboran sobre la base de información completa, puesto que los todos los jugadores tienen acceso al historial de acciones tomadas en periodos precedentes⁹; sin embargo, por tratarse de estrategias elaboradas simultáneamente, en el periodo t se han observado únicamente las acciones realizadas por los demás agentes anteriores a t , es decir del periodo $t - 1$ hacia atrás; por lo que su información aunque completa es imperfecta¹⁰. Como se mencionó, un elemento nuclear de los juegos repetidos, es el tema de las amenazas o promesas y de si estas son susceptibles de materializarse, dado que tanto las estrategias castigo como las promesas podrían modificar el comportamiento presente.

⁹ Los jugadores conocen las acciones y la historia de las acciones que se han realizado hasta el período t .

¹⁰ No conocen la elección del otro jugador en el período actual.

Para el caso de la interacción entre agentes kantianos y agentes de Nash, la idea central de los juegos infinitos con información completa pero imperfecta, es que el comportamiento estratégico de los agentes de Nash podría mimetizarse entre la estrategia del agente kantiano, por lo que el resultado en el equilibrio de Nash en estrategias puras para juegos estáticos no se replicaría en la solución del juego repetido.

Considere la matriz de pagos de la tabla 4.1, del apartado anterior que se reproducirá por conveniencia en esta sección en la tabla 5.1. Los jugadores deciden simultáneamente sus estrategias en el primer periodo, y habiendo observado el resultado, eligen sus decisiones para el segundo y así sucesivamente hasta $t = \infty$, por lo que las acciones en el periodo t depende de los resultados en $t - 1$.

Tabla 5. 1

		J_j	
		<i>kantiano</i>	Nash
J_i	<i>kantiano</i>	(25.6, 25.6)	(5.1, 28.3)
	Nash	(28,3, 5.1)	(20.5, 20.5)

Los pagos que recibe el jugador i, j son la sumatoria de las ganancias de cada agente las veces que se repite el juego, multiplicado por un factor de descuento δ ; que representa el valor presente de las pagos futuras. formalmente:

$$u_1 + \delta u_2 + \delta^2 u_3 + \delta^3 u_4 + \dots + \delta^{t-1} u_t \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_{it} (L^i, \bar{L}^j) \dots eq. 5.1$$

Para el agente i kantiano, dado el nivel de esfuerzo del agente j de Nash ($\bar{L}^j$), y:

$$v_1 + \delta v_2 + \delta^2 v_3 + \delta^3 v_4 + \dots + \delta^{t-1} v_t \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} v_{jt} (\bar{L}^i, L^j) \dots eq. 5.2$$

Para el agente j de Nash , dado el nivel de esfuerzo del agente j de Kant ($\bar{L}^i$).

Proposición 1: si el agente es kantiano y prefiere desviarse en algún periodo t , entonces prefiere jugar la estrategia de desvió todos los periodos. Por lo que para cualquier δ , los agentes usan la estrategia kantiana.

Prueba: Entonces, si los jugadores se comportan como agentes kantianos en el periodo $t - 1$ maximizaran el beneficio, en el periodo t . En caso contrario, cuando se comportan como agentes de Nash en un periodo su beneficio serán bajos en el siguiente. El elemento fundamental del razonamiento es que si los agentes se comportan como jugadores kantianos en el periodo $t - 1$, seguirán comportándose de igual manera en lo sucesivo (ver: **conjetura 1**). Suponga por ejemplo que el jugador i , da inicio al juego comportándose de manera kantiana y lo sigue haciendo en cada $t - \text{esimo}$ periodo, si y solo si, el jugador j en todos los $t - 1$ periodos juega la estrategia kantiana; y cuando el resultado difiera, jugara como un agente de Nash. Este tipo de comportamiento recibe el nombre de *estrategia de activación* (Osborne 1994, p. 143).

En virtud de la *estrategia de activación*, el agente i aplicara la estrategia castigo y jugara como Nash el resto de los periodos. Si el resultado en cualquier periodo, por ejemplo, si en la etapa t , el agente j eligió comportarse como un agente de Nash, entonces los pagos a partir de $t + 1$ deben ser $20.5\delta + 20.5\delta^2 + 20.5\delta^3 + \dots = \frac{20.5\delta}{1-\delta}$. Considere que en el periodo t el agente i se comportó según la estrategia del agente kantiano, por lo que el pago para el agente i en este periodo fue de 28.3, entonces la suma de los pagos, está dada por:

$$28.3 + \frac{20.5\delta}{1-\delta} \dots eq. 5.3$$

Si el agente j desde un principio hubiese decidido comportarse como un agente kantiano, el valor presente de la sucesión hubiese estado representada por:

$$25.6 + 25.6\delta + 25.6\delta^2 + 25.6\delta^3 + \dots = \frac{25.6}{1-\delta} \dots eq. 5.4$$

El elegir el comportamiento kantiano es una estrategia optima, si se cumple:

$$\frac{25.6}{1 - \delta} \geq 28.3 + \frac{20.5\delta}{1 - \delta}$$

Entonces la decisión óptima del agente j será la estrategia kantiana si se cumple que el factor de descuento sea $\delta \geq 0.346$. Por lo que la *estrategia de activación* es un equilibrio si y solo si, $\delta \geq 0.346$, por lo tanto siempre que el factor de descuento este lo más cerca de 1 la *estrategia de activación* es la mejor respuesta (Osborne 1994, p. 145). De esta manera queda evidenciado que las estrategias kantianas son un resultado óptimo, para agentes de Nash pacientes, es decir con una tasa de descuento $\delta \geq 0.346$; a pesar de que el equilibrio en estrategias puras corresponde a la estrategia de comportamiento que lo impulsa a actuar como un agente tipo Nash; con lo cual queda demostrado la **proposición 1**.

Cabe resaltar que este valor de la tasa de descuento δ , corresponde a la definición previa de $\alpha = 0.8$ y $b = 0.2$; asignar otros cifras a estos parámetros puede acerca o alejar el valor de la tasa de descuento de 1, por ejemplo, para un valor $\alpha = 0.7$ y $b = 0.1$, el valor de la tasa de descuento $\delta = 0.32$.

5.2. Interacción Kant- Nash, en juegos finitos.

Se aceptó tácitamente que la información que poseen los agentes, era de conocimiento de común; en una gran variedad de situaciones es poco realista suponerlo; de hecho, la información no es conocida por todos los jugadores, el escenario en que toman sus decisiones implica incertidumbre, puesto que no tienen certeza sobre el tipo de agente al que se enfrentan. Esta situación se moldea bajo los juegos bayesianos, que al aplicarse a encuentros sucesivos a través del tiempo recibe el nombre de *equilibrio bayesiano perfecto* (Osborne 1994, p. 231). En este orden de ideas se busca introducir el equivalente de equilibrio perfecto en subjuegos, en una situación en donde los agentes actúan de manera estratégica, al no revelar el tipo de agente al que pertenecen. Vale aclarar que el desconocimiento de los agentes recae sobre la tipología del agente, es decir el jugador i no sabe que tipo de agente es j y viceversa, lo que si conocen los jugadores en el periodo t , son los movimientos de los demás en el periodo $t - 1$. De igual manera el agente sabe

que si emplea la estrategia kantiana lo hace porque el resultado es el mejor para todos los agentes y también que la mejor estrategia en el último periodo de juego para un jugador tipo Nash consiste en develar su verdadero comportamiento. Por último, se mantiene la idea de que las estrategias se eligen simultáneamente.

Lo primero que debe ponerse sobre la mesa, es que los jugadores elaboran su estrategia con base en conjeturas, estas conjeturas se representan a través de probabilidades π y $1 - \pi$ vinculadas al conjunto de información al que se ha llegado en un periodo cualquiera del juego. Los agentes actúan conformen a las conjeturas, pero no necesariamente estas tienen que ser razonables, es decir, entre el conjunto de conjeturas las existen quienes están o no en la trayectoria de equilibrio. Ahora bien, el equilibrio está compuesto tanto de las estrategias de cada jugador, como de las conjeturas sobre cada conjunto de información en las que el agente tenga que actuar¹¹.

Tabla 5. 2

		J_j	
		<i>kantiano</i>	Nash
J_i	<i>kantiano</i>	(5.1, 5.1)	(-15.4, 7.8)
	Nash	(7.8, -15.4)	(0, 0)

Para comprender todos estos conceptos se tomará como ejemplo el modelo de reputación¹² (Kreps et al. 1982, p. 245), considere la reputación como la creencia en la probabilidad π de que el agente sea del tipo kantiano y $1 - \pi$, la probabilidad de que se trata de un agente tipo Nash. Para simplificar y con base en la conclusión del valor apropiado para el factor de descuento δ que se obtuvo en la sección 4.1, se supondrá que $\delta = 1$; Por lo que la matriz de pagos será idéntica en todas las etapas. La matriz de pagos de la tabla 4.1 se normaliza por el valor correspondiente

¹¹ Para ver en más detalle los requisitos que deben satisfacer el equilibrio bayesiano perfecto ver (Gibbons; 1992: 184-187)

¹² También se puede ver en (Osborne; 1994: 238)

al pago que reciben el agente cuando se comportan como un jugador de Nash (ver tabla 5.2).

Considere de nuevo que existen dos jugadores, el agente j y el agente i , además que el agente i pudiese o bien adoptar el comportamiento kantiano y mantener su estrategia en los $t + 1$ periodos siguientes siempre y cuando, el agente j se comporte como jugador kantiano, en el periodo $t - 1$. O también el agente i pudiese adoptar la estrategia de Nash, pero con un elemento adicional, desea no develar su tipo hasta antes del último periodo donde finalmente, debido a la racionalidad de Nash y a sabiendas que la solución de equilibrio en estrategias puras, Nash domina estrictamente a Kant, decidirá elegir la estrategia de Nash. Entonces la senda temporal, para un juego de 3 periodo está dada por

Tabla 5. 3	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
<i>Estrategia i Kant</i>	<i>Kant</i>	$x_{2i} = x_{1j}$	$x_{3i} = x_{2j}$
<i>Estrategia i Nash</i>	x_{1n}	x_{2n}	<i>Nash</i>
<i>Estrategia j</i>	x_{1j}	x_{2j}	<i>Nash</i>

El objetivo es determinar el valor de x , es decir el comportamiento óptimo para cada uno de los agentes en los diferentes momentos de tiempo. Utilizando la lógica de inducción hacia atrás, se analizara primero los periodos $t = 2,3$. El agente j tiene a su disposición dos estrategias comportarse como un jugador kantiano o comportarse como uno del tipo Nash. Suponga que elige la estrategia de Nash

Tabla 5.4	$t = 2$	$t = 3$
<i>Estrategia i Kant</i>	$x_{2i} = x_{1j}$	<i>Nash</i>
<i>Estrategia i Nash</i>	x_{2n}	<i>Nash</i>
<i>Estrategia j</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>

En cuyo caso el, pago en el periodo 3 para el agente j , es

$$v_{j3}(Nash, Nash) = 0$$

Si el agente j quiere promover, que en el periodo 3 el agente i no aplique la estrategia castigo, entonces j se comportara en $t = 2$ como un agente kantiano, por lo que, $x_{2j} = Kant$ entonces la senda temporal quedara:

Tabla 5.5	$t = 2$	$t = 3$
<i>Estrategia i Kant</i>	$x_{2i} = x_{1j}$	<i>Kant</i>
<i>Estrategia i Nash</i>	x_{2n}	<i>Nash</i>
<i>Estrategia j</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>

Los pagos quedaran

$$v_{j3}(Kant, Nash) = 7.8\pi$$

Como $v_{j3}(Kant, Nash) > v_{j3}(Nash, Nash)$, entonces la mejor que puede hacer el jugador j es comportarse como un agente kantiano en el periodo 2. Ahora como el jugador j juega Nash en el periodo 3, no existe razón para que el agente i Nash, en $t = 2$, no se comporte como un agente de Nash ($x_{2n} = Nash$), por lo que la matriz de pago queda:

Tabla 5.6	$t = 2$	$t = 3$
<i>Estrategia i Kant</i>	$x_{2i} = x_{1j}$	<i>Kant</i>
<i>Estrategia i Nash</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>
<i>Estrategia j</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>

De nuevo si el agente j quiere que x_{2i} sea igual a Kant tendrá que comportarse en x_{1j} como Kant:

Tabla 5.7	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
<i>Estrategia i Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>
<i>Estrategia i Nash</i>	x_{1n}	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>
<i>Estrategia j</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>

Los pagos correspondientes serán:

$$v_{j2}(Kant, Kant, Nash) = 5.1\pi - 15.4(1 - \pi) + v_{j3}(Kant, Nash)$$

Considere que j puede desviarse del comportamiento en la tabla 5.8; y en vez de comportarse en x_{1j} como un agente kantiano lo haga como un agente de Nash, tal como se muestra en la tabla 5.8.

Tabla 5.8	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
<i>Estrategia i Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>	<i>Kant</i>
<i>Estrategia i Nash</i>	x_{1n}	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>
<i>Estrategia j</i>	<i>Nash</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>

En cuyo caso el pago está dado por:

$$v_{j2}(Nash, Kant, Nash) = -15.4 + 7.8\pi$$

Por lo que si $v_{j2}(Kant, Kant, Nash) \geq v_{j2}(Nash, Kant, Nash)$, es decir $\pi \geq 0$, se concluye que así no se tengan indicios de que el agente i sea kantiano lo mejor que puede hacer j es no desviarse la senda temporal de la tabla 4.7.

Ahora si el jugador i Nash, se comporta como tal en el primer periodo, esta información pasara a ser de dominio público, por lo que no tiene sentido que j juegue Kant en el periodo 2 de modo tal que la senda de comportamiento en este caso quedara como:

Tabla 5.9	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
<i>Estrategia i Nash</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>
<i>Estrategia j</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>

De modo tal que sus pagos quedaran:

$$v_{i1}(Nash, Nash, Nash) = 7.8$$

Por el contrario, si i Nash, se comporta como un agente kantiano en $t = 1$, entonces , la senda de comportamiento en este caso queda:

Tabla 5.10	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
<i>Estrategia i Nash</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>
<i>Estrategia j</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>

En este caso el pago de i esta dado por:

$$v_{i1}(Kant, Nash, Nash) = 12.9$$

Dado que $v_{i1}(Kant, Nash, Nash) > v_{i1}(Nash, Nash, Nash)$, la mejor estrategia de i Nash es comportarse en $t = 1$ como un jugador kantiano. La senda de comportamiento completa quedara:

Tabla 5.11	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
<i>Estrategia i Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>
<i>Estrategia i Nash</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>
<i>Estrategia j</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>

La tabla 5.11 muestra las sendas de comportamiento de equilibrio, es decir las estrategias optimas, cuyos pagos son

Para la senda de comportamiento:

<i>Estrategia i Nash</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>
<i>Estrategia j</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>

$$v_i(Kant, Nash, Nash) = 12.9$$

$$v_j(Kant, Kant, Nash) = -10,3$$

$$Bienestar\ social = v_i(Kant, Nash, Nash) + v_j(Kant, Kant, Nash) = 2$$

Para la senda de comportamiento:

<i>Estrategia i Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>
<i>Estrategia j</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Nash</i>

$$u_i(Kant, Kant, Kant) = -5.2$$

$$v_j(Kant, Kant, Nash) = 18,3$$

$$Bienestar\ social = u_i(Kant, Kant, Kant) + v_j(Kant, Kant, Nash) = 13.1$$

Ahora, si los agentes adoptaran solo la estrategia de Nash, entonces:

Tabla 5.12	<i>t = 1</i>	<i>t = 2</i>	<i>t = 3</i>
<i>Estrategia i Nash</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>
<i>Estrategia j Nash</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>	<i>Nash</i>

$$u_i(Nash, Nash, Nash) = 0$$

$$v_j(Nash, Nash, Nash) = 0$$

$$Bienestar\ social = u_i(Nash, Nash, Nash) + v_j(Nash, Nash, Nash) = 0$$

Considere, que los agentes desean implementar el imperativo categórico kantiano, y eligieran comportarse como jugadores kantianos en todos los periodos, la senda de comportamiento quedaría de la siguiente manera:

Tabla 5.13	<i>t = 1</i>	<i>t = 2</i>	<i>t = 3</i>
<i>Estrategia i Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>
<i>Estrategia j Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>	<i>Kant</i>

$$u_i(Kant, Kant, Kant) = 15.3$$

$$v_j(Kant, Kant, Kant) = 15,3$$

$$Bienestar\ social = u_i(Kant, Kant, Kant) + v_j(Kant, Kant, Kant) = 30.6$$

Entonces $30.6 > 13.1 > 2$, que reafirma la conclusión de la sección 3, donde se indicó que el bienestar social mejora, cuando los agentes implementan estrategias kantianas.

A pesar de lo anterior, el resultado de la tabla 5.11, es la senda de comportamiento que los agentes eligen a través del tiempo, por lo que para un valor de $\pi > 0$, no existen incentivos en los jugadores para desviarse de estas trayectorias. La solución se circunscribe a cualquier matriz de pagos en donde se analice el dilema de prisionero para agentes de Kant en retroalimentación con agentes tipo Nash, por lo que no depende de los valores que tome matriz de pagos.

Este resultado, valido para $t = 1, 2, 3$ periodos, es generalizable para T perdidos finitos. En donde los resultados de la tabla 5.11 representan los últimos 3 periodos de juego para $T > 3$ periodos finitos. Observe que si el jugador i *Nash*, adoptará la estrategia racional en un periodo t , con $t < T - 2$, la información se difundiría en el otro jugador por lo que recibiría 7.8 en el periodo t y 0 en los siguientes periodos, pero la ganancia para i *Nash* si en t adopta la estrategia kantiana es de 5.1 en el periodo t , 7.8 en el periodo $t + 1$ y 0 en cada periodo siguiente, de modo tal que el para maximizar sus ganancias el jugador i *Nash* no se desviara de la estrategia kantiana hasta $T - 2$, en el juego de T periodos finitos. Por su parte el jugador j mantendrá la estrategia kantiana en este juego hasta el periodo $T - 1$. En conclusión, las estrategias kantianas surgen como un proceso adaptativo, cada vez que los agentes persigan su máximo beneficio.

5.3. Comentarios finales

Si comparamos la solución del juego infinito (sección 5.1) y del juego finito, puede observar que el resultado entre los juegos difiere. En el primero caso adoptar el comportamiento kantiano es la estrategia de equilibrio, sin embargo, en los juegos finitos, aunque los jugadores adoptan estrategias kantianas durante buena parte del juego sobre el final se desvían hacia la estrategia racional. Por lo que la contrastación revela que hay un desacuerdo entre el agente cuando juega por

infinitos periodos y cuando juega finitos periodos, a este se le conoce con el nombre de “Inconsistencia dinámica”¹³.

Este conflicto entre los dos tipos de juegos es fruto de la interacción entre los distintos agentes, nos podríamos preguntar si ¿la sola existencia del agente kantiano induce su comportamiento en el resto de la población? Para Roemer (2010, p. 56) el equilibrio kantiano surge como concepto normativo que se reproduciría en la sociedad solo si existen un precedente que regle el comportamiento de los agentes, nuestra hipótesis va más allá y propone que las estrategias kantianas surgen como un proceso adaptativo; aunque esto deja abierta la posibilidad de que un agente kantiano también puede adoptar estrategias racionales¹⁴, como un proceso de adecuación a situaciones del mundo real. Por lo que una posible explicación es que las estrategias kantianas son tanto el resultado de un proceso adaptativo temporal, como un proceso de adecuación espacial.

6. Conclusiones

El protocolo de optimización kantiana consiste en una idea de reciprocidad o benéfico mutuo, el cual se desprende del denominado imperativo categórico en la filosofía de Kant, este derrotero del comportamiento aterrizado a la economía argumenta, que los agentes deciden *cooperar “si y solo si, resulta mejor para todos el que todos cooperen a que nadie coopere”* (Elster 2000, p. 66). Las estrategias que se derivan de este protocolo brindan un concepto de equilibrio óptimo en el sentido de Pareto, para el problema plantado en la tragedia de los comunes. La solución proporcional del denominado equilibrio kantiano multiplicativo, propone una regla de asignación que soluciona el problema del polizón. Tanto la regla de asignación como el imperativo categórico, aplicado al pensamiento económico brindan una explicación y recoge en su teoría el comportamiento de los agentes

¹³ Ver, Kyndlald, F. and Prescott, E. (1977)

¹⁴ tal como en la estrategia castigo, en la que el agente kantiano paga con la misma moneda.

que, al momento de elaborar sus estrategias tienen presentes las externalidades que recaerían sobre sí mismo, si los demás agentes se comportaran como él.

Es de destacar que los agentes kantianos realizan su proceso de optimización, exentos de algún tipo de consideración altruista, empática o filantrópica. El jugador kantiano, ***procura el bienestar de las demás personas no de manera desinteresada, sino con la intención de ayudarse a sí mismo***. Por ejemplo, en agentes que tienen elementos en común, esta dada la capacidad de establecer intenciones conjuntas, por lo que, si los jugadores reconocen que actuando de manera articulada podrían mejorar el bienestar, piensa que de seguro todos coincidirán en realizar dicha estrategia. Entonces el equilibrio kantiano considera implícitamente que los agentes tienen la posibilidad de elaborar estrategias que poseen una intención conjunta a partir del cual se ejecutan acciones similares cuyos resultados conducen a la eficiencia.

La introducción de agentes kantianos en un *contexto de juegos estratégicos*, permite alcanzar asignaciones que son dominantes en el sentido de Pareto, en comparación con el proceso de maximización que realizan los agentes tipo Nash. Los agentes kantianos limitan el esfuerzo laboral dedicado a la extracción o utilización de un recurso, puesto que interiorizan las externalidades en las que podrían incurrir. Si los jugadores se comportan fijando su atención simplemente en un interés desprovisto de cualquier otra consideración, el resultado que se deriva, le permite a la sociedad en su conjunto lograr un mayor beneficio al alcanzado cuando maximizan al estilo de Nash.

Ahora, si estos dos tipos de agentes interactúan, los resultados aún se replican en la interacción, no obstante, nada garantiza que los agentes de Nash adopten las estrategias kantianas; de hecho, en un juego de una sola tirada, los jugadores de Nash se apropian del esfuerzo laboral al que renuncian los agentes kantianos, por lo que es necesario la introducción de un marco de análisis dinámico.

En juegos repetidos los agentes con un sentido de la moral del tipo kantiano pueden garantizar la explotación de un recurso de manera sostenible, con el cual se permitirá a las comunidades llegar a un consenso moral que implique un

equilibrio estable a través del tiempo. Se determina que en juegos dinámicos los agentes de Nash pueden adoptar estrategias kantianas bien sea por la vía de una tasa de descuento o porque el beneficio total se maximiza, cuando en diferentes momentos del tiempo los agentes que interactúan se comportan de manera kantiana. A si una perspectiva de desarrollo con responsabilidad social atenuaría la tragedia de los comunes en un horizonte temporal de largo plazo.

Tanto en los trabajos de Romer (1996, 2010, 2014) como en los de Van Long (2019) los resultados se han presentado de manera general, se plantea las condiciones matemáticas con las que deben cumplir las formulaciones y el concepto económico vinculado a cada una de ellas. Uno de los aportes fundamentales de este documento ha sido, a partir de un ejemplo para una comunidad que lleva a cabo actividades de extracción minera, replicar los resultados de la literatura precedente, bajo una forma funcional específica. y demostrar que los axiomas del protocolo kantiano se cumplen.

En el caso de la interacción entre agentes kantianos y de Nash, los resultados del escenario kantiano siguen siendo los mismos; sin embargo, los agentes de Nash, podrían sacar provecho de esta situación acaparando la parte del esfuerzo laboral que deja de realizar el jugador kantiano. Es por ello que se hace necesario analizar la interacción en un contexto dinámico. Se evidencia que la decisión óptima del agente será adoptar estrategias kantianas si se cumple que el factor de descuento sea $\delta \geq 0.346$, en el caso de juegos infinitos. Y que para el caso de juegos finitos los agentes de Nash pueden adoptar estrategias kantianas por cierta cantidad de periodos y sobre el final de la senda temporal adoptar de nuevos sus estrategias racionales.

Se discutió sobre el final los problemas de “inconsistencia dinámica” que surgen de la contradicción entre la estrategia del agente en un juego infinito en comparación con la estrategia adoptada si el agente participa de un juego finito, se argumenta, que ello depende de la manera en que se aborde el imperativo categórico, es decir, si el equilibrio kantiano es un concepto normativo o si es el resultado de un proceso adaptativo. Se demuestra a través de los juegos dinámicos

la hipótesis de que el equilibrio kantiano surge como un proceso adaptativo. Sin embargo, también se evidenció que los agentes de Kant pueden adoptar estrategias de Nash, tal como sucede, con la estrategia castigo del agente kantiano. Se deja como material de futuras investigaciones si pueden las estrategias kantianas ser el resultado tanto de un proceso adaptativo temporal, como un proceso de adecuación espacial.

El ejemplo de la comunidad de mineros planteado en términos matemáticos ha introducido una estructura de costos lineales para simplificar los cálculos. Puesto que el objetivo en un principio, había sido comprobar si los resultados propuestos tanto en juegos estáticos y juegos dinámicos, para agentes kantianos y de Nash que juegan entre sí o interactúan entre grupos, se replican bajo una estructura funcional definida. Sin embargo, por tratarse el oro de un recurso no renovable, la estructura de costos debería adoptar una forma que reproduzca el incremento de los costos a medida que el recurso se hace más escaso. Quedará como materia de futuras investigaciones implementar estas mejoras en el modelo.

También se dejó abierta la discusión, para equilibrios kantianos en estrategias mixtas, que por ir más allá de los intereses que persigue este documento, queda como material de investigación futuro.

Por otra parte, el ejemplo adoptado para realizar buena parte de los cálculos, se trata de un ejercicio discreto, queda pendiente realizar el mismo razonamiento, pero para un ejemplo continuo. También se han hecho algunos supuestos sobre los valores de α y b ; los resultados podrían variar dependiendo del valor que estos tomen. Queda como material de futuras investigaciones realizar estudios comparativos dependiendo del valor de los parámetros. Por otra parte, se ha trabajado el ejercicio sin prestar mayor atención al número de agentes, pero se esperaría que entre mayor fuera el número de estos; por ejemplo, a mayor número de kantianos mayor propensión tendrían los demás agentes de Nash de adoptar comportamientos kantianos. Si bien se ha diferenciado entre agentes kantianos y no kantianos, el trabajo no introducido ningún tipo de señal que pueda diferenciar

uno del otro. Estos elementos podrían alimentar las investigaciones futuras sobre el tema.

Acerca de la literatura en equilibrios kantianos aún no se ha escrito la última palabra, queda un vasto campo de temas por abordar, los elementos señalados en el párrafo anterior constituyen solo una pequeña parte de las investigaciones que podrían robustecer la teoría, aun así, tenemos la convicción de que estas cuantas hojas serán una contribución significativa a la teoría, y brindará a aquellos interesados en la literatura un primer acercamiento a este universo en construcción.

Bibliografía

Debraj, R. (2007). *A Game-Theoretic Perspective on coalition formation*, Oxford University Press.

Elster, J. (2000). *Las limitaciones del Paradigma de la Elección Racional: Las ciencias sociales en la encrucijada*, Institució Alfons el Magànim.

García, M. (1992). *Lecciones Preliminares de Filosofía*, Editores Mexicanos Unidos, México.

Gibbons, R. (1992). *Un Primer Curso de Teoría de Juegos*, Traducción de Calvo, P. y Vilà, X., Editor Antoni Bosch, Barcelona.

Hardin, G., 1968. *The Tragedy of the Commons*, Science, 162 (12), pp. 1243-1248. DOI: 10.1126/science.162.3859.1243

Kant, M. (1785). *Fundamentación de la Metafísica de las Costumbres*. Traducción por García, M., Editorial Porrúa, México. (2007).

Kant, M. (1788). *Crítica de la Razón Práctica*, Traducción Granja, D. M., Fondo De Cultura Económica; México. (2005)

Kyndland, F. and Prescott, E., 1977. *Rules Rather Than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans*, Chicago Journals, 85 (6), pp. 473-492.

Krepp, D., Milgrom, P., and Wilson, R., 1982. *Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisoners' Dilemma*, Journal of Economic Theory, 27 (7), pp. 245-252. DOI: 10.1016/0022-0531(82)90029-1

Laffont, J.-J., 1975. *Macroeconomic Constraints, Economic Efficiency and Ethics: An Introduction to Kantian Economics*, Economica, 42 (11), pp.430-437. DOI: 10.2307/2553800

Long, N. V., 2016. *Kant-Nash Equilibrium in a Quantity-Setting Oligopoly*, in Mouche, V. and Quartieri, F. (eds.), Equilibrium Theory for Cournot Oligopolies and Related Games: Essays in Honor of Koji Okuguchi, New York, pp. 179-202. DOI: 10.1007/978-3-319-29254-0_12

Long, N. V., 2019. *A Dynamic Game with Interaction Between Kantian Players and Nashian Players*, in Pineau, P. and Sigué, S. and Taboubi, S. (eds.) Games in Management Science: Essays in Honor of Georges Zaccour, New York, pp. 249-267. DOI: 10.1007/978-3-030-19107-8_14

Mas-Colell, A., Whinston, M. and Green, J. (1995). Microeconomic Theory, Oxford University Press.

Osborne, M. J. and Rubinstein, A. (1994). A Course in Game Theory, The MIT Press.

Ostrom, E. (1990). Governing the Commons: The Evolution of Institutions for Collective Action, Cambridge University Press.

Roemer, J. (1996). Theories of Distributive Justice. Harvard University Press.

Roemer, J., 2010. *Kantian Equilibrium*, The Scandinavian Journal of Economics, 112 (1), pp. 1-24. DOI: 10.1111/j.1467-9442.2009.01592.x

Roemer, J., 2014. *Kantian Optimization: A Microfoundation for Cooperation*, Journal of Public Economics, 127 (4), pp. 45-57. DOI: 10.1016/j.jpubeco.2014.03.011

Roemer, J. (2019). How we Cooperate: A Theory of Kantian Optimization. Yale University Press.

Sen, A., 1977. *Rational Fools: A Critique of the Behavioral Foundation of Utility*, Philosophy & Public Affairs, 6 (1), pp.317-344.

Wicksteed, M.A. (1967). *The Common Sense of Political Economy*, Vol I, Routledge & Kegan Paul Limited.