



DOCTORADO EN CIENCIAS ECONÓMICAS

Tesis que presenta Salvador Rivas Aceves

“El cambio tecnológico generado por el gobierno”

para obtener el grado de Doctor en Ciencias Económicas

Director

Dr. Francisco Venegas Martínez

Ciudad de México, enero 2010

Agradecimientos

La presente tesis doctoral representa la culminación de una etapa y el comienzo de otra en mi vida, es el fruto de esfuerzos, sufrimientos, dichas y bendiciones que se presentaron ante mí en los últimos años. La culminación de este trabajo de investigación hubiera sido imposible sin el apoyo de un conjunto invaluable de personas a mí alrededor.

En principio, deseo agradecer a Dios por iluminar mi camino y mi mente, por fortalecer mi corazón y por darme una esposa tan maravillosa. Gracias a ti Zorayda por hacer de mí lo que soy, por soportarme, amarme y sobre todo por llevarme por el camino que transitamos juntos con tanta paciencia. Dedico a mi hija Samantha, cuyo nacimiento coincidió con la finalización de esta etapa de mi vida, los triunfos y felicidades obtenidos por este logro. Tu nacimiento hija mía es lo mejor que me ha pasado en la vida.

Agradezco de igual forma a Francisco Venegas Martínez por sus consejos, correcciones e indicaciones a lo largo de esta investigación, pero en particular agradezco su amistad. Un agradecimiento especial a un par de amistades invaluable, que desde su aparición en mi vida no han hecho otra cosa que enseñarme en todos los ámbitos de mi vida, gracias Beatriz García Castro y Juan Froilán Martínez Pérez.

Por último, quiero agradecer a la Universidad Autónoma Metropolitana que me dio la identidad intelectual y personal que poseo.

A todos

Muchas gracias de todo corazón.

ÍNDICE

Capítulo	Página
1. Introducción	6
1.1 Crecimiento endógeno y cambio tecnológico	17
1.2 Antecedentes	19
1.2.1 Modelos de crecimiento con cambio tecnológico, de competencia imperfecta y de I+D	20
1.2.2 Modelos ortodoxos de crecimiento con cambio tecnológico	21
1.2.3 Modelos heterodoxos de crecimiento con cambio tecnológico y competencia imperfecta	24
1.2.4 Modelos de crecimiento con cambio tecnológico de competencia imperfecta e I+D	26
1.2.5 Modelos de crecimiento con gobierno	28
1.2.6 Algunas reflexiones generales	32
2. La investigación	34
2.1 Planteamiento del problema de investigación	34
2.2 Preguntas de investigación	35
2.3 Justificación	35
2.4 Especificación de las hipótesis de trabajo	36
2.5 Propósitos y objetivos de la investigación	36
2.6 Estrategia metodológica y recursos técnicos	37
2.7 Aspectos metodológicos de los modelos de crecimiento endógeno	38

3. El cambio tecnológico generado por el gobierno	42
3.1 Las condiciones básicas de la economía	43
3.2 El gobierno generador del cambio tecnológico	48
3.3 El gasto de gobierno constante	51
3.4 Gasto de gobierno en una economía monetaria	58
3.5 Gasto de gobierno, una aplicación	66
3.5.1 Impulso tecnológico gubernamental en la agroindustria	75
3.5.2 Impulso tecnológico gubernamental y dinero como medio de financiamiento	79
3.5.3 Impulso tecnológico gubernamental y dinero como reserva de valor	82
3.6 Gasto de gobierno, desarrollo tecnológico y habilidad laboral	87
3.6.1 Estructura analítica en términos reales	87
3.6.2 Estructura analítica en términos nominales	94
3.7 Gobierno como promotor del cambio tecnológico: un modelo de crecimiento endógeno con trabajo, dinero y deuda	99
3.8 Gasto de gobierno y su impacto directo sobre el producto	117
3.9 Gasto de gobierno y difusión tecnológica	131
3.10 Gasto de gobierno y aprendizaje	132
3.11 Conclusiones generales respecto al cambio tecnológico generado por el gobierno	142
4. El proceso del cambio tecnológico público y privado	145
4.1 El cambio tecnológico público y privado	146
4.2 La evolución tecnológica	151

4.3 El gasto de gobierno bajo incertidumbre	155
4.4 El gobierno y el cambio tecnológico	158
4.5 La Función de Innovación de la economía	162
4.6 Los saltos en el conjunto de conocimiento gubernamental	169
4.7 Innovación radical e incremental	173
4.8 El proceso de innovación	178
4.9 Conclusiones generales respecto a la innovación pública y privada	184
5. Conclusiones	186
Apéndice matemático	192
Referencias	206

1. Introducción

En la actualidad, uno de los principales factores que influyen en el crecimiento económico de las naciones es el cambio tecnológico. El aumento en el nivel tecnológico al interior de una economía conduce a condiciones de organización, producción, asignación y distribución más eficientes, lo cual conduce a un incremento en la productividad. Lo anterior necesariamente se traduce en un mayor nivel de actividad económica, y esto se ve reflejado en la tasa de crecimiento económico.

En principio, es común suponer que la empresa, al interior del sector privado, es el único agente económico capaz de realizar actividades de investigación y desarrollo tecnológico que permitan sentar las bases para el cambio tecnológico. Debido a la búsqueda perpetua de una mayor ganancia, las empresas tratan de obtener las mayores ventajas posibles en la tecnología adoptada. Una de estas ventajas consiste en tener acceso a condiciones más eficientes de producción y distribución, vía el cambio tecnológico generado por la propia empresa. Es aquí en donde se encuentra la motivación principal que tiene una empresa para invertir recursos en la investigación y el desarrollo tecnológico. Sin embargo, el gobierno es otro agente económico que puede invertir recursos en la investigación y el desarrollo tecnológico. En este caso, la motivación principal para invertir no se encuentra en la obtención de ganancias sino en el establecimiento de mejores condiciones estructurales, económicas y sociales, que se traduzcan en mejoras en la calidad de vida de sus habitantes, en otras palabras, metas de crecimiento y desarrollo de largo plazo. El gasto público puede tomar dos formas; puede ser un subsidio a la innovación a través de programas que busquen fomentar las actividades de investigación y desarrollo en las empresas; o bien puede tratarse de un gasto directamente destinado a paraestatales con el mismo objetivo (v.g., la National Aeronautics and Space Administration, NASA). Al respecto, existen gobiernos que

desde hace muchos años destinan gasto gubernamental para la investigación y el desarrollo tecnológico, adicional a la inversión del sector privado, con el objetivo de generar un cambio en las condiciones tecnológicas al interior. Este tipo de actividad pública se encuentra más arraigada en los países desarrollados, especialmente en el norte de Europa, Estados Unidos y Japón. A continuación, el Cuadro 1 muestra el nivel de gasto, como porcentaje del Producto Interno Bruto (PIB), en investigación y desarrollo tecnológico destinado por dichos países.

Cuadro 1. Gasto en Investigación y Desarrollo como Porcentaje del PIB

Año	Dinamarca	Alemania	Francia	Austria	Finlandia	Suecia	USA	Japón
1996	1.84	2.19	2.27	1.59	2.52	3.45	2.53	2.81
1997	1.92	2.24	2.19	1.69	2.70	3.47	2.56	2.87
1998	2.04	2.27	2.14	1.77	2.86	3.55	2.61	3.00
1999	2.18	2.40	2.16	1.88	3.16	3.57	2.65	3.02
2000	2.24	2.45	2.15	1.91	3.34	3.86	2.73	3.04
2001	2.39	2.46	2.20	2.04	3.30	4.18	2.74	3.12
2002	2.51	2.49	2.23	2.12	3.36	3.91	2.64	3.17
2003	2.58	2.52	2.17	2.23	3.43	3.86	2.67	3.20
2004	2.48	2.49	2.15	2.22	3.45	3.62	2.67	3.25
2005	2.45	2.48	2.13	2.41	3.48	3.80	2.65	3.29
2006	2.43	2.51	2.12	2.45	3.45	3.73	2.70	3.34
Promedio	2.28	2.41	2.17	2.03	3.19	3.73	2.65	3.10

Fuente: Eurostat 2008, indicadores GERD (Gross Expenditure in Research and Development)

Se puede apreciar que en países como Finlandia y Suecia se destinan montos considerables de recursos en actividades de investigación y desarrollo tecnológico. Por ejemplo, Suecia en el 2006 destinó el 3.73% de su PIB, lo que equivale a 11.81 billones de dólares de acuerdo con cifras de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE 2008). De los montos de inversión, destinados a la investigación y

desarrollo tecnológico, una parte es financiada directamente por el gobierno. El siguiente cuadro muestra la tendencia de los países avanzados respecto de la participación del gobierno en dicho gasto.

Cuadro 2. Gasto en Investigación y Desarrollo por Fuente de Recursos
Porcentaje Financiado por el Gobierno

Año	Dinamarca	Alemania	Francia	Austria	Finlandia	Suecia	USA	Japón
1996	35.7	38.1	41.5	43.2	31.2	26.4	33.2	18.7
1997	36.1	35.9	38.8	41.0	30.9	25.8	31.5	18.2
1998	33.8	34.8	37.3	37.8	30.0	24.9	30.1	19.3
1999	31.2	32.1	36.9	38.9	29.2	24.5	28.4	19.6
2000	32.5	31.4	38.7	38.0	26.2	21.3	25.8	19.6
2001	28.2	31.4	36.9	38.3	25.5	22.4	27.5	18.6
2002	27.6	31.6	38.8	33.6	26.1	23.5	30.3	18.2
2003	27.1	31.2	39.0	34.4	25.7	23.5	30.4	17.7
2004	27.4	30.5	37.0	32.6	26.3	23.5	31.4	17.3
2005	27.6	28.4	38.2	36.5	25.7	24.6	32.5	17.9
2006	28.3	29.5	39.0	36.6	25.1	26.2	31.7	18.3
Promedio	30.5	32.3	38.4	37.4	27.4	24.2	30.3	18.5

Fuente: Eurostat 2008, indicadores GERD (Gross Expenditure in Research and Development)

Obsérvese que, para el caso comentado, el 26.2% del monto total de inversión en investigación y desarrollo tecnológico fue financiado por el gobierno, esto equivale a 3.07 billones de dólares gastados por el gobierno en dicho rubro. En términos generales, la participación del gobierno está entre el 30% y 40% para las economías aquí analizadas, a excepción de Japón en donde dicha proporción es menor. Sin embargo, dado que en el 2006 el PIB de Japón fue de 4077.8 billones de dólares, entonces el gobierno japonés destinó 24.93 billones de dólares en investigación y desarrollo tecnológico en ese año. Por lo tanto, para las economías avanzadas, es muy importante destinar recursos enfocados a la generación tecnológica. Aún más, existen países en

donde la participación del gobierno en este rubro es mucho mayor, debido a que el monto de inversión total es muy bajo, es decir, el sector privado destina muy pocos recursos a dichas actividades, tal y como lo muestra el Cuadro 3.

Cuadro 3. Gasto en Investigación y Desarrollo

Año	Bulgaria		Chipre		Polonia		Portugal	
	*	**	*	**	*	**	*	**
1996	0.52	35.1	0.18	75.2	0.65	57.8	0.57	66.9
1997	0.51	67.8	0.20	74.6	0.65	61.7	0.59	68.2
1998	0.57	69.7	0.22	68.5	0.67	59.0	0.65	69.1
1999	0.57	69.7	0.23	66.5	0.69	58.5	0.71	69.7
2000	0.52	69.2	0.24	61.6	0.64	66.5	0.76	64.8
2001	0.47	66.2	0.25	60.1	0.56	64.8	0.80	61.0
2002	0.49	69.8	0.30	64.1	0.54	61.9	0.76	60.5
2003	0.50	66.9	0.35	67.0	0.56	62.7	0.74	60.1
2004	0.50	65.8	0.37	68.3	0.57	61.7	0.77	57.5
2005	0.49	67.2	0.40	69.4	0.56	57.7	0.81	55.2
2006	0.48	68.5	0.42	68.8	0.55	57.5	0.85	54.3
Promedio	0.51	65.08	0.29	67.65	0.60	60.89	0.73	62.48
* Proporción del PIB								
** Porcentaje Financiado por el Gobierno								

Fuente: Eurostat 2008, indicadores GERD (Gross Expenditure in Research And Development)

Para este grupo de países, el porcentaje de financiamiento proveniente del gobierno oscila entre el 50% y el 75%, lo que evidencia la cobertura por parte del sector público cuando el sector privado no interviene en actividades de investigación y desarrollo. Por lo tanto, el gasto de gobierno es fundamental para lograr el cambio tecnológico necesario para fomentar el crecimiento económico.

En lo que se refiere al capital humano, la inversión en conocimiento resulta ser primordial para poder aplicar las nuevas tecnologías, como se muestra a continuación:

Cuadro 4. Inversión en conocimiento como porcentaje del PIB

Año	Dinamarca	Alemania	Francia	Finlandia	Suecia	USA	Japón
1997	3.8	3.5	3.9	5.2	5.6	5.6	4.1
1998	4.5	3.6	3.9	5.3	5.8	5.9	4.4
1999	4.7	3.7	4.1	5.5	6.2	6.1	4.5
2000	4.7	3.8	4.1	5.7	6.5	6.3	4.6
2001	5.1	3.8	4.2	5.8	6.9	6.5	4.8
2002	5.3	3.8	4.1	5.9	6.7	6.4	4.9
2003	5.1	3.9	4.3	5.9	6.4	6.5	5.1
2004	5.4	3.9	4.3	6.3	6.6	6.6	5.3
Promedio	4.8	3.8	4.1	5.7	6.3	6.2	4.7

Fuente: Statistical Profile by Country OCDE 2008.

Como se puede apreciar, el porcentaje del PIB destinado a la inversión en conocimiento es mayor que el porcentaje del PIB destinado a la investigación y desarrollo. En Estados Unidos, Japón y muchos países de Europa, la participación del gobierno en las actividades de Investigación y Desarrollo, que generan un cambio tecnológico, está presente desde hace más de tres décadas. El nivel de gasto que estos países destinan para fomentar dichas actividades se ha incrementado en los últimos años, alcanzando un alto grado de desarrollo tecnológico con un impacto en el crecimiento económico. Por su parte, el Cuadro 5 muestra el nivel de gasto de gobierno en investigación y desarrollo como proporción del PIB de las principales economías, las cuales se caracterizan por tener un alto desarrollo tecnológico.

Como se aprecia, en países como Finlandia, Japón y Suecia el gasto de gobierno en actividades de Innovación y Desarrollo como porcentaje del PIB fue de 3.45%, 3.45% y 3.82%, respectivamente, en 2006. Por su parte, Austria, Dinamarca y Estados Unidos gastaron en el mismo año 2.45%, 2.43% y 2.62% de su PIB. Gracias a la

magnitud del gasto de gobierno en estas actividades, el desarrollo tecnológico en estos países ha mostrado un gran avance.

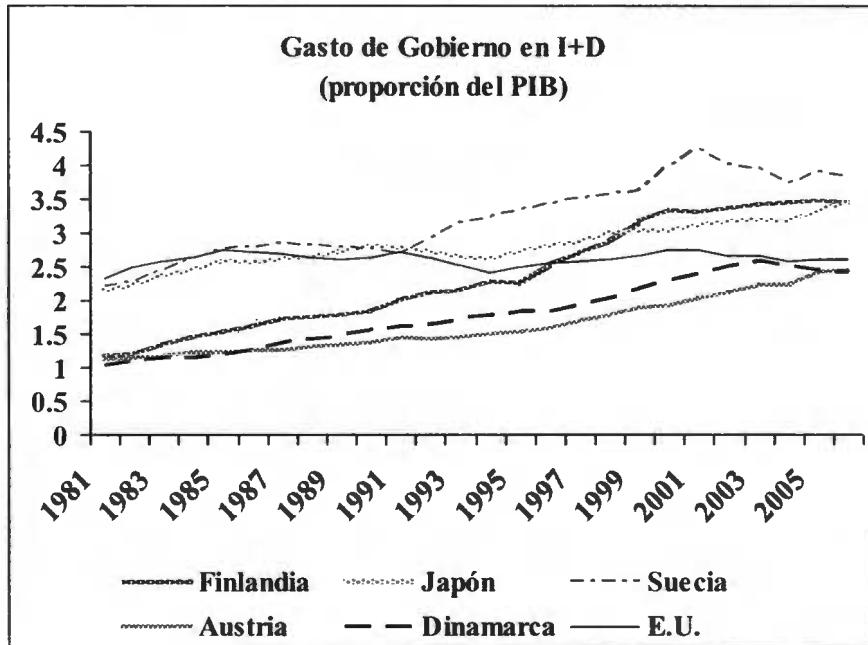
Cuadro 5. Gasto de gobierno en Investigación y Desarrollo en países desarrollados. (porcentaje del PIB)

	Finlandia	Japón	Suecia	Austria	Dinamarca	EU.
1981	1.16	2.14	2.20	1.10	1.04	2.34
1982	1.20	2.23	2.27	1.15	1.08	2.51
1983	1.32	2.36	2.45	1.16	1.13	2.58
1984	1.45	2.44	2.60	1.21	1.15	2.64
1985	1.54	2.58	2.75	1.21	1.19	2.75
1986	1.62	2.55	2.79	1.25	1.26	2.72
1987	1.71	2.62	2.84	1.26	1.35	2.69
1988	1.74	2.64	2.80	1.03	1.43	2.65
1989	1.77	2.73	2.78	1.32	1.48	2.61
1990	1.84	2.81	2.75	1.36	1.55	2.65
1991	2.00	2.78	2.70	1.44	1.61	2.71
1992	2.10	2.72	2.90	1.42	1.64	2.64
1993	2.14	2.65	3.15	1.44	1.72	2.52
1994	2.28	2.60	3.23	1.51	1.77	2.42
1995	2.26	2.71	3.32	1.54	1.82	2.51
1996	2.52	2.81	3.41	1.59	1.84	2.55
1997	2.70	2.87	3.51	1.69	1.92	2.58
1998	2.86	3.00	3.55	1.77	2.04	2.62
1999	3.16	3.02	3.62	1.88	2.18	2.66
2000	3.34	3.04	3.96	1.91	2.29	2.74
2001	3.30	3.12	4.25	2.03	2.39	2.76
2002	3.36	3.17	4.00	2.12	2.51	2.66
2003	3.43	3.20	3.95	2.23	2.58	2.66
2004	3.45	3.17	3.71	2.22	2.50	2.59
2005	3.48	3.33	3.89	2.41	2.45	2.62
2006	3.45	3.45	3.82	2.45	2.43	2.62

Fuente: OCDE 2008

La tendencia a incrementar dicho gasto gubernamental en estos países se muestra de manera más clara en la siguiente grafica:

Gráfica 1. Gasto de gobierno en países desarrollados 1981 - 2006



Fuente: Elaboración propia con datos de OCDE 2008

En Latinoamérica, la participación del gobierno en la promoción de tecnología es casi nula y ésta ha sido la tendencia en varias décadas. Debido a los procesos de privatización de las empresas paraestatales, que tuvieron lugar principalmente en Sudamérica, con el objetivo de mejorar las finanzas públicas y reordenar el gasto público, el tamaño de los gobiernos se redujo considerablemente.

En países en vías de desarrollo como México, Turquía, Brasil, Chile y la India se han destinado mucho menos recursos hacia las actividades de Innovación y Desarrollo. No obstante que la tendencia es creciente, el gasto de gobierno en dicho rubro difícilmente sobrepasa el 1% como porcentaje del PIB para este conjunto de países, tal y como lo muestra el siguiente cuadro:

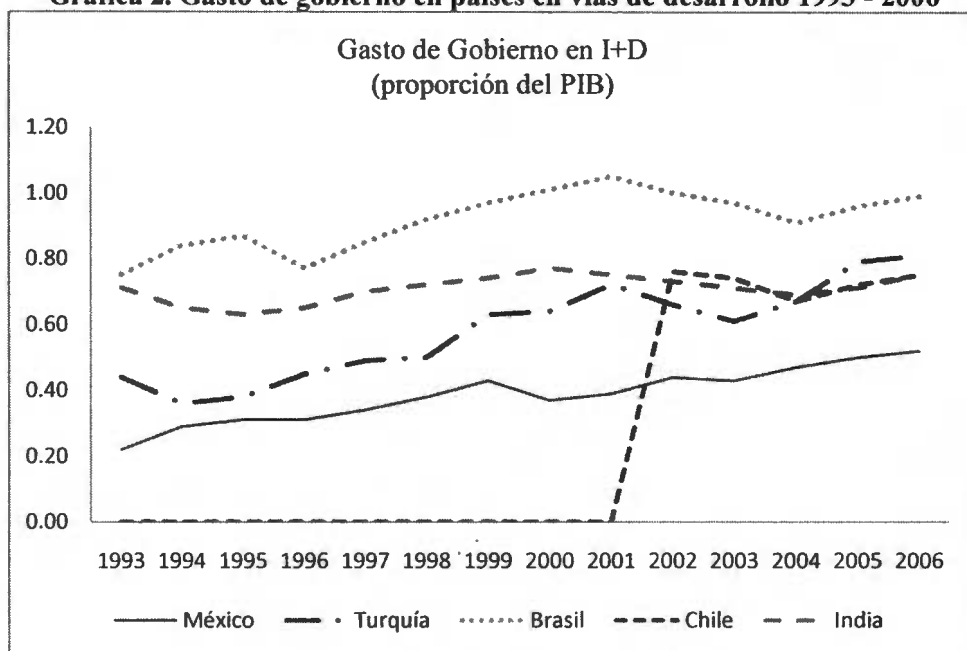
Cuadro 6. Gasto de gobierno en Investigación y Desarrollo en países en desarrollo. (porcentaje del PIB)

	México	Turquía	Brasil	Chile	India
1993	0.22	0.44	0.75	..	0.71
1994	0.29	0.36	0.84	..	0.65
1995	0.31	0.38	0.87	..	0.63
1996	0.31	0.45	0.77	..	0.65
1997	0.34	0.49	0.85	..	0.70
1998	0.38	0.50	0.92	..	0.72
1999	0.43	0.63	0.97	..	0.74
2000	0.37	0.64	1.01	..	0.77
2001	0.39	0.72	1.05	..	0.75
2002	0.44	0.66	1.00	0.76	0.73
2003	0.43	0.61	0.97	0.74	0.71
2004	0.47	0.67	0.91	0.67	0.69
2005	0.50	0.79	0.96	0.72	0.71
2006	0.52	0.81	0.99	0.75	0.75

Fuente: OCDE 2008

Específicamente, en México, el gasto en Innovación y Desarrollo en el 2006 apenas alcanzó el 0.52% como porcentaje del PIB, mientras que en países como Turquía y Brasil se destinaron recursos por 0.81% y 0.99% respectivamente. La política económica respecto a la innovación y el desarrollo tecnológico en los últimos años ha sido descuidada, evidenciando el poco interés en materia de innovación principalmente en México. A continuación la gráfica 2 presenta la tendencia en materia de gasto en I+D de año 1993 al 2006.

Gráfica 2. Gasto de gobierno en países en vías de desarrollo 1993 - 2006



Fuente: Elaboración propia con datos de OCDE 2008

Al comparar el desempeño en las actividades en investigación y desarrollo con respecto a los países industrializados, se aprecia que en los países en vías de desarrollo se destinan pocos recursos a la investigación y desarrollo tecnológico, por ejemplo en México, el gasto destinado a dicho rubro fue apenas de 5,145.5 millones de pesos en el 2005. Por su parte, países como China y Japón destinaron \$115,196.9 y \$130,745.4 millones de pesos respectivamente, mientras que Estados Unidos destinó \$324.464 millones de pesos. Asimismo, el Reino Unido y Alemania gastaron \$35,171.1 y \$62,493.2 millones de pesos respectivamente, lo anterior representa una diferencia abismal respecto al gasto que en México se ejerció, como se muestra en el Cuadro 7.

La diferencia antes mencionada resulta más evidente cuando se analiza el gasto en investigación y desarrollo en términos del porcentaje del PIB (véase la Gráfica 3). Países como Suecia y Japón gastaron en el 2005 el 3.89% y el 3.33% de su PIB, respectivamente, en investigación y desarrollo, por su parte Corea destinó el 2.99% y

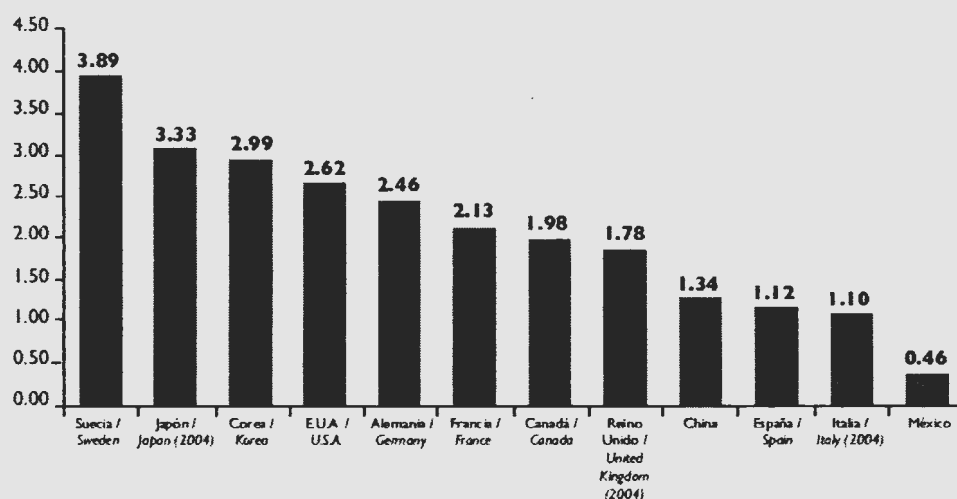
Estados Unidos el 2.62%, inclusive China que se considera una economía emergente en el mismo año gastó el 1.34%, mientras que México solamente destinó el 0.46%.

Cuadro 7. Gasto Interno en Investigación y Desarrollo por País
(Millones de pesos corrientes)

País	2005
Alemania	62,493.2
Canadá	21,777.3
China	115,196.9
EU	324,464.5
España	13,263.8
Francia	4,039.2
Italia	17,725.5
Japón	130,745.4
México	5,145.5
Reino Unido	35,171.1
Suecia	11,286.7

Fuente: INEGI-CONACYT Encuesta sobre Investigación y Desarrollo 2006, OECD Main Science and Technology Indicators 2007, CONACYT 2008.

Gráfica 3. Gasto Interno en Investigación y Desarrollo por País
como porcentaje del PIB en 2005



Fuente: INEGI-CONACYT Encuesta sobre Investigación y Desarrollo 2006, OECD Main Science and Technology Indicators 2007, CONACYT 2008.

Lo anterior proporciona una explicación de porqué el cambio tecnológico es uno de los determinantes que hacen que los países desarrollados crezcan a tasas mayores que los países en vías de desarrollo. De ser así, una economía podría crecer a un ritmo mayor si mantiene una política de innovación proactiva. Por lo tanto, el gasto que se destina a dichas actividades podría tener un papel importante a la hora de fijar metas de crecimiento económico.

De manera más puntual, dentro de los pocos recursos que se canalizan a las actividades de investigación y desarrollo tecnológico en México, resulta ser que el gobierno aporta una mayor proporción del gasto interno para dicho rubro. En el Cuadro 8, el gasto se presenta por fuente de financiamiento en donde las principales fuentes son la Productiva, el Gobierno y el de la Educación Superior. Si se considera que, en México, la investigación al interior del sector educativo se da principalmente del lado público, entonces los recursos del sector Gobierno y del sector Educación Superior tiene como origen el presupuesto federal, por lo tanto, el monto de financiamiento a la investigación y desarrollo por parte del gobierno es mayor en más del triple que el destinado por el sector productivo. Lo anterior puede implicar que, debido a la baja inversión en investigación y desarrollo por parte del sector privado, el gobierno se vea obligado a tratar de suplir el papel que podrían llevar a cabo las empresas, es decir, la participación del gobierno en el cambio tecnológico en México es muy importante.

Análogamente, la aplicación de estos recursos se da en mayor proporción al interior del gobierno y del sector educativo, lo que viene a comprobar que las actividades en investigación y desarrollo se realizan de manera más amplia en el sector público que en el privado, como lo muestra el Cuadro 9.

Cuadro 8. Gasto Interno en Investigación y Desarrollo por Fuente de Financiamiento. (Millones de pesos de 2006)

Sector de Ejecución	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Productivo	6,430	7,597	8,799	9,395	11,758	11,395	14,589	16,526
Gobierno	16,568	19,738	18,785	18,586	18,724	21,959	19,019	19,581
Educación Superior	2,190	3,130	1,780	2,851	2,893	2,713	2,813	2,903
No Lucrativo	31	35	170	247	294	277	295	371
Exterior	2,050	1,719	275	399	270	268	1,064	431
Total	27,269	32,219	29,809	31,478	33,939	36,611	37,779	39,813

Fuente: Encuesta sobre Investigación y Desarrollo Experimental 2000, INEGI-CONACYT Encuesta sobre Investigación y Desarrollo Tecnológico 2002, 2004 y 2006, INEGI, Sistemas de Cuentas Nacionales de México, SHCP, Cuenta de la Hacienda Pública Federal 1998 -2005, CONACYT 2008

Cuadro 9. Gasto Interno en Investigación y Desarrollo por Sector de Ejecución (Millones de pesos de 2006)

Sector de Ejecución	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Productivo	7,683	8,229	8,869	9,537	11,526	11,230	16,118	18,692
Gobierno	10,031	14,498	12,435	12,293	8,484	10,381	9,790	9,226
Educación Superior	8,604	8,488	8,428	9,576	13,482	14,523	11,449	11,145
No Lucrativo	952	1,005	77	71	448	478	422	450
Total	27,269	32,219	29,809	31,478	33,939	36,611	37,779	39,813

Fuente: Encuesta sobre Investigación y Desarrollo Experimental 2000, INEGI-CONACYT Encuesta sobre Investigación y Desarrollo Tecnológico 2002, 2004 y 2006, INEGI, Sistemas de Cuentas Nacionales de México, SHCP, Cuenta de la Hacienda Pública Federal 1998 -2005, CONACYT 2008

En resumen, la empresa no es el único agente que realiza actividades de investigación y desarrollo en la actualidad, sino que también el gobierno interviene en dichas actividades. Es importante señalar que el gasto gubernamental para fomentar las actividades de Innovación y Desarrollo, se puede emplear de diversas formas. Por ejemplo, se pueden destinar recursos de manera directa a las empresas privadas para impulsar la productividad del capital físico. Por otro lado, dichos recursos pueden estar

enfocados directamente a la generación de tecnología al interior de las empresas paraestatales destinadas a actividades de innovación. Cualquiera que sea la forma de dicho gasto, el objetivo principal es generar las condiciones necesarias para modificar el nivel tecnológico de la economía y, por lo tanto, generar mayor crecimiento económico.

Por lo tanto, es evidente que la participación del gobierno en las actividades en investigación y desarrollo tecnológico es muy importante, y puede sentar las bases para un cambio en las condiciones de producción que permita incrementar la tasa de crecimiento económico de una nación. Por lo que, el análisis del efecto que pueda o no tener el gobierno sobre la tasa de crecimiento a través de dichas actividades resulta pertinente.

El presente documento tiene como objetivo establecer las bases sobre las cuales se puede abordar este problema, desde una perspectiva teórica, para poder complementar el enfoque neoclásico del crecimiento ya que existen muy pocos desarrollos al respecto, tal y como se muestra a continuación.

1.1. Crecimiento endógeno y cambio tecnológico

El progreso tecnológico y el efecto que tiene sobre el crecimiento económico es un fenómeno de gran interés en la actualidad, pero el estudio, por separado, de ambos comenzó hace mucho tiempo. Respecto al progreso tecnológico, éste ha sido de gran preocupación desde Francis Bacon (1626), el filósofo inglés estaba preocupado por el porvenir de la ciencia y sus posibilidades futuras orientadas hacia la conquista de la naturaleza por el hombre. Por otro lado, la teoría del crecimiento inició hace mucho tiempo cuando las principales preocupaciones giraban en torno a los recursos naturales, como la tierra y el crecimiento de la población. Adam Smith (1776) consideraba que la

capacidad productiva por si misma permitía el crecimiento, y David Ricardo (1817) argumentaba que el comercio era un componente principal del crecimiento.

Así mismo, Thomas Malthus (1798) explicaba que la expansión de la economía se daba principalmente por el incremento poblacional y enfatizaba el papel de la oferta. Posteriormente, el proceso de acumulación de capital y la propiedad de los medios de producción se estudió dentro de la teoría del crecimiento, tomando a la productividad de manera exógena.

Más adelante, a partir de considerar el crecimiento de la población y la capacidad productiva como variables predeterminadas, surgieron los modelos de crecimiento exógeno. Los principales aportes dentro de este marco fueron realizados por Ramsey (1928) que muestra que el crecimiento económico depende de la fracción del ingreso que se ahorre independientemente de la tasa de interés; por Cass (1965) y Koopmans (1965) al determinar de manera endógena la tasa de ahorro analizada por Ramsey; por Domar (1946) que plantea que el crecimiento del producto depende de la propensión marginal al ahorro; y por último Solow (1956) y Swan (1956) que argumentaron que el crecimiento económico se produce siempre y cuando capital y trabajo crezcan a la misma tasa a la que crece la población.

Finalmente, el progreso tecnológico, que fue introducido por primera vez por Harrod (1939)¹ mediante una función de producción con producto marginal del capital constante, tomó fuerza dentro del análisis de crecimiento. Otro desarrollo pionero, introduciendo el conocimiento como causa principal del cambio tecnológico, fue elaborado por Arrow (1962)².

El desarrollo de la teoría siguió un curso con una visión distinta del crecimiento. Dicha visión aparece en la década de los ochentas. En este marco las principales

¹ El progreso tecnológico está en función del valor del capital usado en el proceso de producción.

² El conocimiento como resultado del aprendizaje que está en función de la experiencia.

aportaciones en materia de crecimiento endógeno con cambio tecnológico se deben a Romer (1986) y Lucas (1988). Bajo estos nuevos desarrollos se concibe el cambio tecnológico como un proceso que explica las modificaciones en las condiciones de producción de las firmas en función de cambios cualitativos o cuantitativos de los insumos, tales como el stock de conocimiento, el capital humano o el trabajo calificado.

En los modelos de crecimiento endógeno se ha incorporado de igual forma la creación de nuevos insumos intermedios, el incremento en la calidad de los bienes finales, preferencias por la variedad de productos, etc., lo que ha permitido entender el cambio tecnológico y su efecto sobre el crecimiento desde la visión de la empresa. Desafortunadamente, la teoría neoclásica del crecimiento carece de un análisis teórico que permita dar una explicación del efecto, que pueda o no tener, el cambio tecnológico generado a través del gobierno sobre el crecimiento económico, y de cómo dicho cambio en las condiciones tecnológicas se produce.

1.2. Antecedentes

A continuación se realizará una revisión del estado actual que guarda la teoría del crecimiento, dicha revisión se organiza en dos bloques. En primer lugar, se encuentran los modelos de crecimiento con cambio tecnológico, tanto ortodoxos como heterodoxos, que incorporan a la actividad de investigación y desarrollo (I+D), y a la competencia imperfecta. En segundo lugar, los modelos que incorporan el papel del gobierno dentro del crecimiento económico. Por último, se presentan unas consideraciones respecto al estado actual de la teoría del crecimiento.

1.2.1. Modelos de crecimiento con cambio tecnológico, de competencia imperfecta y de I+D

Existen en la actualidad varias explicaciones sobre el crecimiento económico de una economía. Una de ellas se centra en el cambio de las condiciones tecnológicas a las que se enfrentan las empresas, como son: modificaciones en la calidad y/o en el nivel de aprovechamiento de los factores que entran en el proceso productivo. Al respecto Syrquin (1994) encuentra que la tasa de crecimiento del producto está positivamente relacionada a la tasa de crecimiento de la productividad laboral y de la productividad multifactorial. En su análisis resalta que el crecimiento debido a la productividad de los factores es mayor en países ricos que en países pobres, ya que los estudios desagregados muestran que la tasa de crecimiento de la productividad multifactorial crece en mayor medida, cuando se realizan reasignaciones de recursos de sectores menos productivos a sectores más productivos.

De acuerdo con lo anterior, los países con un ingreso *per capita* mayor tienden a crecer más que los países con un ingreso menor. Inicialmente, los modelos de crecimiento del tipo Harrod (1939) y Domar (1946) tuvieron una gran influencia en los países desarrollados debido a que sus resultados, en materia de crecimiento, dependen del nivel de ahorro de una economía, por lo que el crecimiento en estos países se alcanzaba de manera muy fácil.

Posteriormente, los modelos neoclásicos de la teoría del crecimiento, que nacieron con la aportación de Solow, tuvieron una aceptación mayor ya que el crecimiento dependía del crecimiento de la población. Sin embargo, este tipo de modelos arrojan resultados muy limitados en países pobres. La razón es porque estos modelos están orientados a describir economías desarrolladas por lo que ignoran características esenciales (v.g., carencia de inversión, ausencia de investigación y

desarrollo, etc.) de los países en vías de desarrollo. Una de estas características, de las más importantes, es el nivel de participación que tiene el gobierno en la actividad económica. Muchas de las economías no desarrolladas no cuentan con estructuras de mercado que proporcionen las condiciones necesarias para el avance tecnológico, en cuyo caso la intervención del sector público resulta fundamental, por ejemplo en países en vías de desarrollo como México, Brasil y Argentina, por mencionar algunos.

Una de estas características principales radica en el nivel de participación que tiene el gobierno en la actividad económica. Este tipo de países no cuentan con estructuras de mercado sólidas capaces de proporcionar las condiciones necesarias para el desarrollo de las actividades económicas, y por esta razón la intervención del sector público se vuelve fundamental. En consecuencia, la teoría debe explicar también cómo es que la intervención del gobierno influye en las actividades económicas. Se verá a continuación cómo es que hasta ahora los modelos existentes no proporcionan dicha explicación en términos del cambio tecnológico.

1.2.2. Modelos ortodoxos de crecimiento con cambio tecnológico

Después de la incorporación del progreso tecnológico a la teoría realizada por Harrod, Uzawa (1965) encontró que el cambio tecnológico se puede dar a través de un incremento en la eficiencia laboral, que a su vez no depende de la cantidad de capital usado en el proceso productivo. La eficiencia laboral es parte del conocimiento tecnológico y puede ser modificado por la educación, la salud, la infraestructura y por el consumo de bienes públicos. Uzawa también encuentra que existe una tasa capital-trabajo eficiente que genera un crecimiento óptimo, por lo tanto, una mayor eficiencia laboral conlleva un mayor crecimiento, para cualquier tasa de depreciación.

Como ya se ha comentado anteriormente, dos de las principales aportaciones realizadas en materia de crecimiento endógeno con cambio tecnológico surgieron, en primer lugar, con Romer (1986), donde en un modelo, de equilibrio competitivo, con productividad marginal creciente del conocimiento, con productividad marginal decreciente del capital, y con ambos insumos utilizados en proporciones fijas, se muestra que la tasa de crecimiento es mayor a lo largo del tiempo. En este caso el cambio tecnológico se da debido a la acumulación de conocimiento, todo dentro del marco de la búsqueda de ganancias. En segundo lugar, Lucas (1988), encontró que dada la tasa de crecimiento de la población, los incrementos en la productividad del trabajo y del capital físico y humano conducen a una tasa de crecimiento constante³, si el esfuerzo por aumentar el capital humano se mantiene constante. El capital humano⁴ es producido en el sector de educación.

De manera casi paralela a los desarrollos anteriores y con trabajos empíricos Pavitt y Soete (1981) mostraron que existe una relación entre las actividades en innovación y el PIB. Así mismo, Fagerberg (1988) amplió el análisis realizado por Pavitt y Soete utilizando una muestra de 27 países incluyendo a América Latina y Asia, encontrando que la tasa de crecimiento del PIB depende de la difusión tecnológica internacional, del nivel doméstico de actividad innovadora y de la tasa de crecimiento de la inversión. Por último, Dosi-Freeman-Fabiani-Aversì (1994) argumentan que la difusión tecnológica y la actividad innovadora dependen del comportamiento de los agentes y de cómo ellos aprenden y trabajan.

En un modelo posterior, Romer (1990a) muestra que, con un solo sector con cambio tecnológico de tipo endógeno, la tasa de cambio tecnológico es sensible a la tasa

³ La tasa de crecimiento económico es constante debido a que la tasa de crecimiento del consumo, del producto y del capital físico son iguales a la tasa de crecimiento del capital humano.

⁴ El concepto de capital humano, en este documento, se toma desde el punto de vista de Gary Becker. En este sentido, es un medio de producción que es sustituible pero no transferible como la tierra, el trabajo o el capital fijo, en el cual se puede invertir vía educación, entrenamiento, tratamiento médico, etc.

de interés. Toda la investigación realizada se destina a la producción de bienes de consumo. El subsidio a la acumulación del capital físico tiene un efecto muy pobre sobre la investigación. Una economía con un stock de capital muy grande tendrá un mayor crecimiento y éste se incrementará en mayor medida debido al comercio internacional. El modelo sugiere además que bajos niveles de capital humano generan muy poco crecimiento. Por lo tanto, el capital humano determina la tasa de crecimiento y no el crecimiento de la población.

Asímismo, Romer señala que el cambio tecnológico se da debido a acciones intencionales de los agentes como respuesta a los incentivos de mercado, razón por la que mercados más grandes ocasionan un mayor nivel de investigación y, por ende, un mayor crecimiento. Debido a que los principales insumos son capital físico, trabajo y capital humano y como el conocimiento entra dentro del capital humano, destinar mayor capital humano a la investigación conduce a una mayor tasa de crecimiento. Si el stock de conocimiento es mayor, también lo será la productividad en la investigación.

En esta misma línea de investigación Rivera-Batiz y Romer (1991) encuentran que si el modelo es de dos sectores con capital humano, capital físico y trabajo, en donde además se tienen rendimientos crecientes y *spillovers* tanto en conocimiento como en insumos, las restricciones al comercio sólo afectan a la asignación y no a la tasa de crecimiento. De los desarrollos de Romer se concluye que sus modelos de crecimiento se caracterizan por tener efectos de escala y que para generar una tasa de crecimiento de equilibrio balanceado, es necesario tener rendimientos constantes a escala en todos los factores de la producción. Jones (1995) introdujo rendimientos decrecientes en el conocimiento y mostró como la tasa de crecimiento de largo plazo de equilibrio es independiente del tamaño de la economía, es decir, hay efectos de escala. Sin embargo, la tasa de crecimiento sí depende de la tasa de crecimiento de la fuerza

laboral que es exógena. Por esta razón su modelo se considera como semi-endógeno. Romer supuso rendimientos constantes a escala en los insumos sólo en el sector de bienes finales. Eicher y Turnovsky (1999) mostraron que sólo la función de producción Cobb-Douglas es consistente para encontrar una senda de crecimiento balanceado cuando los rendimientos a escala son arbitrarios.

1.2.3. Modelos heterodoxos de crecimiento con cambio tecnológico y competencia imperfecta

Dentro del marco heterodoxo en la teoría del crecimiento, Howitt (1999) encontró que en un modelo con un producto marginal de innovaciones horizontales que disminuyen más rápidamente que las innovaciones verticales, los efectos de escala son nulificados gracias a la proliferación de productos. En este caso, el crecimiento será mayor debido a cambios institucionales, tecnológicos o de política económica a favor de la actividad en investigación y desarrollo. La tasa de crecimiento de la población tiene un efecto positivo sobre la tasa de crecimiento del progreso tecnológico, pero no es el único determinante como Jones (1995) argumentó. Este tipo de análisis se encuentra insertado en una corriente de modelos que da un tratamiento a la actividad en I+D, la cual será abordada más adelante.

Recientemente, una de las corrientes de este enfoque de la teoría del crecimiento ha tomado como motor principal al cambio tecnológico, profundizando aún más su estudio y enfatizando ahora el papel de la demanda, razón por la cual se ha logrado desarrollar de manera vertiginosa a la teoría del crecimiento dentro de este campo. El argumento que dio origen a estos desarrollos descansa en que la teoría neoclásica del crecimiento presenta varias deficiencias teóricas, tal y como Pasinetti (1994) lo menciona, en el sentido de que generalmente dicho enfoque se centra en el análisis de

estados estacionarios. Este enfoque no proporciona una explicación satisfactoria a fenómenos como el *catching up*, no es posible distinguir el nivel microeconómico del macroeconómico. El análisis se centra en estructuras de mercado de competencia perfecta, dejando de lado los costos de transacción. Tampoco se analiza que pasa con las instituciones durante un proceso de crecimiento. Por último, el supuesto más criticado es la existencia de un único bien y de un consumidor representativo, lo cual conduce a contradicciones en el proceso de cambio tecnológico, en particular, porque lo anterior implica la existencia de nuevos bienes que a su vez modifican las preferencias de los individuos.

Lo anterior ha conducido a varios desarrollos que incorporan la competencia imperfecta dentro de la teoría del crecimiento, el principal ejemplo en materia de cambio tecnológico surgió con Aghion y Howitt (1992), aunque desde una perspectiva diferente. A través de la destrucción creativa propuesta por Schumpeter el crecimiento resulta exclusivamente por el progreso tecnológico como resultado de la competencia entre las firmas para la generación de innovaciones. Cada innovación consiste en un nuevo bien intermedio que puede ser utilizado para producir de manera más eficiente. Debido a la existencia de beneficios monopolísticos las firmas buscan patentar las innovaciones resultantes del proceso de investigación. Dichos beneficios se vuelven nulos una vez que ha surgido una nueva innovación. El modelo no presenta capital físico ni humano⁵.

Posteriormente, Aghion y Howitt (1994) muestran que en un modelo de cambio tecnológico a través de la destrucción creativa, una mayor actividad en investigación acorta el tiempo durante el cual se obtienen ganancias monopolísticas, pero incrementa la tasa de crecimiento. Un incremento en el tamaño de mercado, una mayor

⁵ En este modelo la investigación se realiza utilizando trabajo especializado.

productividad y un aumento en el poder de monopolio ocasiona una mayor tasa de crecimiento.

Por otra parte, Landesmann y Goodwin (1994) argumentan que la introducción de una nueva tecnología en la economía, si se da a través de una innovación potencial exógena, produce un cambio dinámico en la distribución y en la composición de la demanda cuando se da un incremento en la productividad; esto dentro del marco schumpeteriano. A medida que la presión de la competencia aumenta por medio de difusiones de nuevas tecnologías y los salarios se incrementan, los precios se ajustan en función de los costos unitarios ocasionando una reducción en la demanda. Por lo tanto, el cambio estructural es un componente inestable que puede lograr reducir la tasa de crecimiento.

1.2.4. Modelos de crecimiento con cambio tecnológico de competencia imperfecta e I+D

En la teoría neoclásica Nordhaus (1969) fue el primero que introdujo la competencia monopolística en un modelo de crecimiento, permitiendo que la empresa pueda obtener una ganancia monopólica por sus innovaciones, por un cierto periodo de tiempo. Aquí, el cambio tecnológico se da de manera exógena. De manera endógena Prescott y Boyd (1987) muestran que la tasa de crecimiento crecerá a un mayor ritmo si la fracción de recursos asignados a la promoción de coaliciones es más grande. Las coaliciones son grupos de agentes que tienen acceso al mismo conjunto de información y se encargan de la formación de capital humano.

Los modelos de crecimiento endógeno han proporcionado una representación poco satisfactoria de la actividad en investigación y desarrollo de la empresa. Por ejemplo, si las funciones de producción fueran las mismas para cada país y el capital

tuviera libre movilidad, además de las diferencias en dotaciones de recursos naturales y de recursos humanos, las diferencias entre países deberían ser mínimas. Sin embargo, dichas diferencias son enormes y, generalmente, no están relacionadas con las dotaciones, por lo que claramente se evidencia una amplia disparidad tecnológica entre países. Lo anterior ha dado lugar a un creciente desarrollo de modelos que incorporan un tratamiento más profundo en cuanto a las actividades de investigación y desarrollo. El aporte fundamental de estos nuevos modelos está basado en la diferenciación de la tecnología con el capital físico, dándole a la tecnología características de bien no rival y no exclusivo. Con ello se justifica la existencia de crecimiento de largo plazo basado en la innovación.

Posteriormente surgieron los modelos de calidad en el producto y de variedad de productos, de tal forma que las continuas innovaciones, la preferencia de los consumidores por la variedad en los productos, incrementos en la calidad y cambios en los costos, sostiene el crecimiento. Por lo tanto, el crecimiento está determinado por parámetros tecnológicos y por la tasa de crecimiento del sector laboral que se supone exógena, los instrumentos de política económica no afectan al crecimiento. Véase, al respecto, Segerstrom-Anant-Dinopoulos (1990), Young (1998) y Howitt (1999).

Las contribuciones más recientes dentro del marco de los modelos de I+D están dadas por Boucekkine-De la Croix (2003) mostrando que si se presenta un cambio tecnológico, el cual se da a través de un sector de investigación y de trabajo calificado, entonces los shocks tecnológicos afectan la tasa de crecimiento y no así los shocks en capital. Caminati (2004) argumenta que la preferencia por la variedad de productos tendrá un efecto positivo en el crecimiento si la creación de nuevos bienes es endógena y es costosa.

Por último, Reikard (2005) encontró que el cambio tecnológico se da a través de un sector de investigación y las trayectorias de equilibrio de la actividad en I+D dependen negativamente de los precios y positivamente del producto. El avance tecnológico responderá con el producto sólo si éste presenta una tendencia estocástica. En este caso, la elasticidad de la actividad en I+D es creciente y variante con el tiempo.

1.2.5. Modelos de crecimiento con gobierno

Hasta ahora, en los desarrollos aquí revisados, no se encuentra ninguna explicación del papel que puede tener el gobierno en la generación del cambio tecnológico. Todos los análisis teóricos suponen que el cambio tecnológico sólo se puede dar de manera exclusiva por las empresas a través de actividades de investigación y desarrollo. Muchos autores han introducido el gasto del gobierno como un argumento de la función de producción, sólo para analizar el impacto que éste tiene sobre la capacidad productiva de la economía., por ejemplo Barro (1990), Barro y Xala-i-Martin (1992), Glomm y Ravikumar (1994), Cazzavillan (1996) y Turnovsky (1996).

Otros autores como Turnovsky (1993) han introducido el gasto de gobierno para medir el impacto de las políticas económicas, a través de un *tradeoff* entre la tasa de acumulación del capital y la inflación. El crecimiento es mayor si el riesgo asociado a la política monetaria es menor acompañado generalmente por una inflación pequeña; sin embargo, un mayor crecimiento va acompañado de inflación creciente. Por otro lado, cambios en los impuestos que producen distorsiones generan un mayor crecimiento. La participación del gobierno sólo está en función de la política económica.

Easterly-King-Levine-Rebelo (1994) encuentran que a través de un modelo de adopción tecnológica, en donde hay acumulación de capital humano y progreso tecnológico, los subsidios a la acumulación de capital humano y a la adopción de

nuevas tecnologías incrementan la tasa de crecimiento económico. De manera similar, Ludvigson (1996) muestra que el progreso tecnológico sólo se da a través de un aumento en la productividad laboral. Se concluye que la inversión, el consumo y el producto responden positivamente ante cortes en el financiamiento gubernamental por medio de impuestos al ingreso. El impacto del gasto gubernamental dependen de la forma en la cual dicho gasto es financiado, ya sea a través de impuestos o déficit financiero.

Benavie, Grinols y Turnovsky (1996) estudian el papel de los costos de ajuste en un modelo de crecimiento de tres etapas. La primera sin gobierno, la segunda con un gobierno que persigue un presupuesto equilibrado y finalmente una economía en donde el gobierno escoge sus tasas impositivas y el nivel de gasto de manera independiente. La inversión por parte de las firmas está determinada por la q de Tobin que depende de la política fiscal. En ausencia de gobierno las variaciones en la productividad reducen el crecimiento. Cuando se considera al gobierno, un incremento en el impuesto al ingreso reduce el crecimiento y un incremento en el gasto de gobierno no tiene efecto sobre la tasa de crecimiento.

Tirado (2000) muestra que en un modelo de crecimiento endógeno, en donde el cambio tecnológico se da por medio del incremento en el conocimiento adquirido por el capital humano, en una economía monetaria, la tasa de crecimiento depende positivamente de la calidad de capital humano empleado, de la cantidad de recursos que los individuos depositan en los bancos y de la tasa de interés vinculada al acervo de capital destinado a la investigación y desarrollo. Aquí, la política monetaria influye en la tasa de crecimiento. Por último, Caminati (2001) argumenta que en un modelo de crecimiento endógeno con cambio tecnológico, la tasa de crecimiento está determinada

por los parámetros tecnológicos, por las preferencias y por variables de política tecnológica.

En otro tipo de desarrollos Fisher y Turnovsky (1998) introducen el capital público, en forma de gasto gubernamental productivo (como un stock) al análisis de crecimiento con capital privado y estudian la dinámica de la transición de un sistema con un solo sector. Así mismo, Bond-Wang-Yip (1996) analizan la estructura de la dinámica de un modelo bisectorial de crecimiento endógeno con gasto gubernamental productivo.

Posteriormente, Turnovsky (1998) encuentra que el gasto de gobierno en bienes públicos promueve el crecimiento. El gasto está en función de un impuesto al ingreso óptimo, que es necesario para corregir las distorsiones generadas por una desviación del óptimo social del gasto gubernamental y por el grado de congestión que mide el nivel de consumo de los bienes públicos. En otro estudio Turnovsky (1999) muestra que la exposición al riesgo externo incrementa la varianza en el ingreso y que un gobierno grande tiende a reducir el riesgo. Si la economía es abierta, entonces el gobierno será grande sólo si es un acreedor neto. Los agentes toman como dado el tamaño del gobierno y se concluye que la volatilidad y el crecimiento dependen del tamaño del gobierno que está determinado por la proporción de ingresos debidos a los impuestos.

Al introducir los efectos del riesgo sobre el crecimiento y su interacción con la política fiscal y monetaria, Turnovsky (2000) descubre que tasas impositivas altas sobre el ingreso tienen un efecto negativo sobre el crecimiento, mientras que un nivel alto en el gasto de gobierno tiene un efecto positivo (pero pequeño) sobre el crecimiento y cierto efecto de estabilización; el gasto que el gobierno realiza es en producto y bonos.

Por otro lado, Chartterjee, Sakoulis y Turnovsky (2002) analizan el proceso de desarrollo asistido por transferencias públicas de capital que estimulan la acumulación

de capital privado y el crecimiento. La inversión pública en infraestructura es financiada por el gasto de gobierno y las transferencias internacionales. Se concluye que las transferencias sujetas al sector público generan una mayor dinámica de crecimiento sólo si los impuestos y el nivel de gasto gubernamental son lo óptimos. En este caso, el efecto sobre la tasa de crecimiento de largo plazo depende del tamaño de la infraestructura de la economía.

Gong y Zou (2003), por su parte, analizan la acumulación de capital, el gasto militar, la acumulación de armas y el producto. Gong y Zou muestran que un mayor gasto militar extranjero lleva a un mayor crecimiento económico doméstico, siempre y cuando la economía doméstica tenga una elasticidad de sustitución pequeña en el consumo. Si la elasticidad de sustitución es grande, entonces el gasto militar extranjero genera una mayor volatilidad en el crecimiento. Por último, Gokan (2007) verifica que si los bienes públicos incrementan la productividad del capital privado en una economía con crecimiento endógeno, entonces la tasa de crecimiento aumenta cuando aumenta el gasto público.

La incorporación del sector público en el cambio tecnológico sólo se ha dado bajo el enfoque de la organización industrial principalmente a nivel microeconómico, véase Mamuneas y Nadiri (1996), Ham y Mowery (1998) y Mamuneas (1999). Desde dicho enfoque, existen desarrollos teóricos desde la perspectiva macroeconómica acerca del papel que puede tener el gobierno en la generación del cambio tecnológico, vía la investigación básica y aplicada, como por ejemplo en Glomm y Ravikumar (1994) y en Morales (2004).

Fuera del ámbito de la organización industrial, es claro que se ha analizado a profundidad el efecto que diferentes tipos de gasto de gobierno tienen sobre las actividades económicas, sin embargo, la teoría neoclásica del crecimiento carece de un

análisis teórico que permita dar una explicación coherente del efecto que pueda o no tener el gobierno sobre la producción y, por ende, en el crecimiento, cuando dicho agente es el que genera el cambio tecnológico vía el gasto destinado hacia la generación de nuevas condiciones tecnológicas.

1.2.6. Algunas reflexiones generales

De la revisión realizada se puntualizan tres conclusiones. Primero, que hay muchas formas a través de las cuales una sociedad puede acumular conocimiento, como por ejemplo la educación, la capacitación laboral, la investigación científica, innovación de procesos, innovación de productos, e innovaciones industriales que afectan la calidad de los bienes. Todas éstas generan un cambio tecnológico que promueve el crecimiento económico. Sin embargo, ninguna de ellas explica cómo la intervención gubernamental genera un cambio tecnológico.

Segundo, que generalmente la teoría del crecimiento ha explicado que el gobierno debe proveer bienes públicos y las firmas bienes privados. También, sostiene que la investigación básica es un bien público, es decir, no puede ser exclusivo y que la investigación avanzada es un bien privado, es decir, es un bien rival⁶. Sin embargo, el gobierno puede generar bienes que sean no rivales y potencialmente exclusivos, un ejemplo claro lo encontramos en la investigación que hacen los órganos militares para lograr el desarrollo de nuevas tecnologías que sean capaces de incrementar el nivel de eficiencia de las operaciones militares.

Dichos desarrollos, posteriormente, son incorporados a la sociedad y éstos pueden ser usados en actividades económicas, ejemplos como la telefonía celular, el uso

⁶ A este respecto, se debe tomar en cuenta que un bien es rival si cuando lo usa un individuo o firma se puede descartar su uso en cualquier otro agente. Por otro lado, es no rival si puede utilizarse por cualquier individuo o firma al mismo tiempo. Un bien es exclusivo si el dueño puede evitar que sea usado por otros.

de computadoras y programas e innovaciones en la aeronáutica encajan perfectamente aquí. En este sentido, Romer (1990b p. 98) señala que *"para la teoría del crecimiento lo que importa es que un bien sea parcialmente o totalmente exclusivo, en lugar de ser un bien rival."* Por lo tanto, en el caso del gobierno, éste es un agente que puede producir bienes exclusivos además de las empresas, lo cual justifica su consideración como objeto de estudio al interior de la teoría del crecimiento endógeno.

Y tercero, los modelos de cambio tecnológico muestran que si hay un cambio en las condiciones de producción de las empresas, de tal forma que ven aumentada su productividad y al mismo tiempo su nivel de ganancias, entonces el crecimiento económico es mayor. Lo que no analizan dichos modelos es cómo se da el cambio tecnológico, es decir, cómo un individuo incrementa su nivel de conocimiento, o cómo se incrementa la habilidad laboral, o cómo se genera una máquina más eficiente, etc. Eicher (2001) muestra al respecto que el crecimiento depende positivamente de la productividad en la investigación, proporcionando una explicación del cambio tecnológico por medio de microfundamentos, los cuales fueron aplicados sólo al proceso generado por las empresas.

Por todo lo anterior se puede concluir que el crecimiento económico es la suma de actividades de una sociedad completa, por lo que necesariamente depende de la participación de todos los agentes y, de acuerdo con Romer (1994 p. 3), *"en la teoría neoclásica del crecimiento, el centro del crecimiento endógeno está en el comportamiento de la economía como un todo"*, entonces si el gobierno forma parte de la sociedad y más aún si interviene en la actividad económica al interior de la misma, entonces su incorporación en el modelado del crecimiento endógeno, vía el cambio tecnológico, es indispensable.

Además, el análisis del crecimiento endógeno vía el cambio tecnológico tiene que mostrar cómo es que dicho cambio se produce. Tal y como Solow (1994 p. 51) lo dice, *“yo pienso que el valor real de la teoría del crecimiento endógeno emergerá del intento por modelar el componente endógeno del progreso tecnológico como parte integral de la teoría del crecimiento económico”*, por lo tanto, el desarrollo de los microfundamentos que puedan dar explicación al proceso de cambio tecnológico, tanto en las empresas como en el gobierno, es esencial.

2. La investigación

En este capítulo se plantea la estructura general de la investigación en función de las revisiones teóricas y las reflexiones realizadas en el capítulo anterior. Para ello se establece el planteamiento del problema de investigación, las preguntas de investigación, la justificación, especificación de las hipótesis de trabajo, los propósitos y objetivos de la investigación, la estrategia metodológica y los recursos técnicos a seguir y, por último, los aspectos metodológicos de los modelos de crecimiento endógeno. Lo anterior con el objetivo de delimitar el aporte teórico de la presente investigación al interior de la teoría neoclásica del crecimiento.

2.1. Planteamiento del problema de investigación

El principal objetivo del cambio tecnológico, ya sea impulsado por actividades de investigación, por incrementos en la productividad, por aumentos en el stock de conocimiento, mejoramiento del capital humano, etc., es generar mejores condiciones de producción que fomenten el crecimiento económico. Todas estas causas del cambio tecnológico tienen como uno de los orígenes principales el sector empresarial, a pesar

de ello, existen actividades en investigación y desarrollo que son realizadas al interior del sector público que tienen efectos sobre la actividad económica de una sociedad.

Por lo tanto, en conjunto sector privado y sector público contribuyen de manera simultánea al desarrollo de nuevas condiciones de producción a través del cambio tecnológico, debido a esto obviamente ambos tienen algún efecto sobre el crecimiento. La teoría se ha concentrado en explicar el efecto del sector privado sobre el crecimiento, pero no así en el efecto del sector público en el crecimiento. La teoría tampoco explica cómo es que el proceso de cambio tecnológico ocurre en empresas y gobierno.

2.2. Preguntas de investigación

- ¿Cuál es el efecto que el gobierno como agente generador del cambio tecnológico tiene sobre el crecimiento económico?
- ¿Cuál es el efecto que tiene el cambio tecnológico generado tanto por la empresa como por el gobierno sobre el crecimiento económico?
- ¿Cómo se lleva a cabo este proceso de cambio tecnológico al interior de empresas y gobierno?

2.3. Justificación

En virtud de que no existe desarrollo alguno que indique cuál es el efecto que tiene el cambio tecnológico generado por el gobierno sobre el crecimiento, así como tampoco existen microfundamentos que logren explicar cómo se da el proceso de cambio tecnológico en el gobierno y en las empresas, y tomando en cuenta que para los países en vías de desarrollo el cambio tecnológico puede ser una alternativa para generar crecimiento, entonces realizar este estudio ayudará a explorar uno de los caminos que

generan crecimiento económico posibilitando su aplicación en países en vías de desarrollo.

2.4. Especificación de las hipótesis de trabajo

- El crecimiento económico es mayor si se tienen como principales fuentes del cambio tecnológico al gobierno y a las empresas, a diferencia de lo que se tiene si las empresas son la única fuente. En consecuencia, el cambio tecnológico generado por el gobierno tiene un efecto multiplicador en el crecimiento.

y lo que costo 1 y 0

- El proceso de cambio tecnológico se da al interior de empresas y del gobierno de manera distinta, es decir, ambos agentes se encuentran en condiciones diferentes entre sí cuando están tratando de generar cambios tecnológicos, ya que tienen conjuntos de información diferentes.

2.5. Propósitos y objetivos de la investigación

El propósito de esta investigación es proporcionar una explicación de carácter teórico a través del desarrollo de varios modelos. En primer lugar, explicar el efecto que tiene el cambio tecnológico generado por el sector público, en segundo lugar explicar el efecto conjunto entre empresa y gobierno sobre el crecimiento debido al cambio tecnológico generado por ambos y, en tercer lugar, explicar cómo se produce este cambio tecnológico al interior de las empresas y del gobierno. Los objetivos de la investigación son:

- Explicar, a través de diversos modelos teóricos, que el efecto del cambio tecnológico sobre el crecimiento generado por el gobierno tiene un efecto positivo sobre el crecimiento económico.
- Mostrar también que el crecimiento es mayor si de manera conjunta el cambio tecnológico se da a través de empresas y gobierno.
- Establecer las condiciones sobre las cuales el cambio tecnológico se lleva a cabo en las empresas y en el gobierno, así como mostrar que dichas condiciones son distintas.

2.6. Estrategia metodológica y recursos técnicos

La presente investigación se desarrollará dentro del enfoque neoclásico del crecimiento económico, razón por la cual es necesario establecer las principales virtudes y carencias de dicho enfoque. La principal contribución de la nueva teoría del crecimiento es, fundamentalmente, técnica ya que es posible suponer rendimientos crecientes y competencia imperfecta en modelos de equilibrio dinámico. Sin embargo es importante tener en cuenta las carencias de la teoría neoclásica para no incurrir en ellas.

La estructura de los modelos iniciales de crecimiento ha sido blanco de múltiples críticas debido a su debilidad en su construcción. Suponer un único bien producido, un solo sector de producción, rendimientos constantes a escala, una economía competitiva, etc., representan las principales limitaciones. Como consecuencia de los supuestos anteriores, la tasa de crecimiento económico puede ser explicada en términos muy sencillos. En la actualidad las investigaciones dejan de lado los rendimientos constantes y la competencia perfecta para incorporar monopolios, oligopolios y competencia monopolística, lo cual permite a las empresas recuperar sus desembolsos en

investigación. La tasa de crecimiento está ahora determinada por los esfuerzos en investigación y los determinantes del éxito de los mismos.

Algunos otros conceptos que no fueron de interés en la vieja teoría del crecimiento son ahora el centro de la nueva teoría del crecimiento, tales como externalidades, rendimientos crecientes y otras no convexidades. Por ejemplo, Romer (1990b) señala que existen bienes que son no rivales, que son importantes para el crecimiento y que crean no convexidades que son importantes dentro del análisis a nivel agregado.

2.7. Aspectos metodológicos de los modelos de crecimiento endógeno

Existen dos tipos de modelos de crecimiento endógeno. Los lineales que utilizan una función de producción que es homogénea de grado uno en los insumos, en donde si no existen bienes no rivales entonces no hay rendimientos crecientes, lo que simplifica la construcción de un modelo competitivo. Para simplificar aún más, se agregan todos los insumos en una medida simple del capital de tal forma que se tiene una función lineal $Y = F(Z) = \phi Z$, en donde Z son los insumos. De acuerdo con Solow (1994), el supuesto de rendimientos constantes a escala permite realizar un análisis en términos de razones o proporciones y, además, permite la representación de un mercado competitivo. Sin embargo es posible tener rendimientos crecientes a escala y mantener los principales resultados de la teoría neoclásica; tomando en cuenta que es inevitable suponer rendimientos crecientes ya que de lo contrario se tendría una productividad marginal negativa de los factores productivos que son capital.

Un ejemplo de modelos con rendimientos crecientes se encuentra en Romer (1987), en donde se señala que tradicionalmente un equilibrio descentralizado consiste

en un continuo de empresas en el sector de bienes intermedios y en un número indeterminado de empresas en el sector de bienes finales con una función de producción que tiene rendimientos constantes a escala. Los rendimientos crecientes aquí son introducidos a través de un vector de insumos intermedios que interviene en la producción; resultado de la especialización. Lo anterior captura la preferencia por la variedad dentro del proceso productivo.

Por otro lado, están los modelos de *spillovers* que generalmente utilizan una función Cobb-Douglas para representar el proceso productivo, en donde un incremento en unidades de capital o trabajo aumenta el nivel tecnológico de la economía a través de excedentes en conocimiento o en productividad. Según Romer (1994) la mayor parte de los desarrollos dentro del crecimiento endógeno ha seguido la tendencia de los modelos lineales, haciendo hincapié en que las actividades del sector privado son las que contribuyen al avance tecnológico y no las del sector público. Tal y como lo hace Arrow (1962).

Aunado a la linealidad de los modelos de crecimiento, existen otras carencias que deben ser cubiertas. De acuerdo con Romer (1994) la teoría del crecimiento debe cubrir 5 aspectos básicos.

1. Existen muchas firmas en el mercado y se tiende a la concentración del producto en manos de un solo agente monopolístico.
2. Los descubrimientos difieren de otros insumos en el sentido que mucha gente los puede usar al mismo tiempo, es decir, los bienes ordinarios son rivales, pero la información no.
3. Es posible duplicar las actividades físicas. Por lo tanto, suponer que el mercado es competitivo significa que la actividad opera en la escala mínima eficiente, así

que no existen economías de escala por la construcción de una planta que es el doble de larga que la ya existente.

4. El avance tecnológico proviene a través de lo que la gente hace y es una función del tiempo.
5. Muchos individuos y firmas tienen poder de mercado y ganan beneficios monopolísticos debido a sus descubrimientos. Existe una ganancia monopolística porque la información no tiene costo de oportunidad.

Dado lo anterior suponer que la función de producción es homogénea de grado uno en todos los insumos, rompería con los puntos 2 y 3. Los primeros modelos que incorporan los 5 aspectos antes señalados, los encontramos en Romer (1987 y 1990a), el primero sin *spillovers* y el segundo con *spillovers*⁷.

Conjuntamente a lo que Romer planteó, Solow (1994) señala que hay que tener en cuenta dos aspectos:

- Las innovaciones pueden llegar a ser sólo complementarias y aún así sumar ganancias.
- Si una innovación genera un aumento absoluto en el nivel tecnológico, entonces una mayor asignación de recursos en I+D dará como resultado un solo salto en la productividad pero no una mayor tasa de crecimiento de la misma.

Por lo tanto, tomando en cuenta todo lo anterior hay que construir un modelo que analice el efecto del cambio tecnológico sobre el crecimiento debido sólo al gobierno y a empresas y gobierno de manera conjunta. Al mismo tiempo se incorporarán microfundamentos que logren explicar cómo el proceso de un cambio tecnológico se da

⁷ El análisis se hace introduciendo rendimientos crecientes a escala.

al interior de los sectores público y privado. Se definirán una función de innovación para la economía en función del grado de cambio tecnológico generado por empresas y gobierno.

El proceso de cambio tecnológico generado por sector público y privado evitará incurrir en lo que Solow (1957) ha denominado efectos neutrales del cambio tecnológico. Solow argumenta que cualquier tipo de cambio en la función de producción es interpretado como un cambio tecnológico. Dichos cambios son neutrales si deja intacta la tasa marginal de sustitución y sólo modifican el nivel de producto. Además señala que si el stock de capital consiste en muchas maquinas idénticas y cada una es reemplazada por una maquina más durable pero con la misma capacidad de producción anual, entonces el stock de capital se incrementará. Sin embargo, el flujo máximo de servicio del capital será constante. Lo que mide la función de producción es el capital en uso y no en el capital en cantidad. Por ende, la existencia del cambio tecnológico generado por sector privado y público es necesaria para evitar este tipo de problemas.

Por último, el análisis se hará en tiempo continuo, modelando con variables deterministas en primer lugar y posteriormente estocásticas los fenómenos económicos inherentes a este tipo de comportamiento. Benhabib y Jovanovic (1991) concluyen que un salto grande en el entendimiento del crecimiento ocurrirá sólo cuando el motor del crecimiento representado por un proceso estocástico de shocks tecnológicos es exitosamente endogeneizado. Al incorporar procesos estocásticos será posible analizar las dinámicas de transición en el proceso de crecimiento que de acuerdo con Turnovsky (2001) son importantes. Por lo tanto, un análisis de control óptimo estocástico en tiempo continuo, modelando todas las variables antes mencionadas, será uno de los elementos principales de este estudio. Véase, al respecto, Merton (1975).

3. El cambio tecnológico generado por el gobierno

Inicialmente, la introducción del gobierno en la teoría del crecimiento se hizo en función del impacto que éste genera, sobre el crecimiento, a través de las políticas gubernamentales que logren modificar la tasa de retorno del capital, como en el caso de Jones y Manuelli (1990).

Muchos otros modelos de crecimiento endógeno explican el crecimiento económico en términos del comportamiento del gobierno; véanse, por ejemplo; Barro (1990) que estudia cómo el gasto de gobierno y el tamaño relativo del mismo impactan el crecimiento económico; Futagami-Morita-Shibata (1993) amplían el análisis de Barro y muestran que la tasa de crecimiento es la máxima cuando la tasa de ingresos impositivos es igual a la elasticidad del producto respecto al capital público; Venegas-Martínez (1999) que establece que si la deuda pública externa crece a una tasa mayor que la deuda externa privada, entonces existe un “tradeoff” entre deuda pública externa y crecimiento; y en Venegas-Martínez (2008) que analiza cómo la política fiscal afecta al crecimiento.

En este capítulo se estudia el efecto de la participación del gobierno en el desarrollo de tecnología en modelos de crecimiento endógeno bajo varias hipótesis. A diferencia de los modelos de crecimiento neoclásicos estándar, la utilización de dicho instrumental en este modelo permitirá explicar el efecto que tiene la política gubernamental tecnológica sobre la tasa de crecimiento. Para ello, es necesario establecer las condiciones básicas de la economía sobre las cuales, posteriormente, se introduce al gobierno en las actividades relacionadas con la generación de nuevas condiciones tecnológicas.

3.1. Las condiciones básicas de la economía

En esta sección se describe, brevemente, el modelo básico de crecimiento endógeno a fin de tener un punto de referencia que permita resaltar las diferencias cuantitativas y cualitativas que surjan en el modelo propuesto cuando se introduzca el gobierno como agente promotor de la tecnología.

Inicialmente considere una economía, con rendimientos constantes a escala y rendimientos marginales decrecientes, en donde viven agentes económicos con dotaciones y preferencias idénticas, que tienen vida infinita y en donde además la técnica para producir un único bien está dada. Se trata de una nación que no sostiene intercambios comerciales con otras economías, por lo que la economía es cerrada, y en donde los consumidores buscan maximizar el nivel de utilidad que obtiene gracias al consumo. Suponga que dicha utilidad está dada por:

$$U = \int_0^{\infty} u(c_t) e^{-\rho t} dt, \quad (1)$$

en donde c_t es el consumo *per capita* y ρ es la tasa subjetiva de descuento que mide qué tan ansioso está un individuo por el consumo presente. Suponga también que la utilidad por el consumo de los individuos está determinada por la siguiente función:

$$u(c_t) = \ln c_t. \quad (2)$$

Este tipo de especificación del consumo satisface que $u'(c_t) > 0$ y $u''(c_t) < 0$. Por lo tanto, la utilidad marginal que le genera al consumidor una unidad adicional de consumo del bien, es positiva pero decreciente. Por otro lado, se supone que el consumidor posee una empresa por lo que simultáneamente toma decisiones de consumidor y de productor. Debido a que la técnica está dada, todos los productores enfrentan las mismas condiciones de producción representadas por:

$$f(k_t) = Ak_t. \quad (3)$$

Este tipo de función de producción fue utilizada por Harrod (1939) y por Rebelo (1991), y muestra que el producto marginal del capital es positivo, es decir $A > 0$. Esta variable expresa además el nivel tecnológico de la economía. Dado que el individuo asume los roles de consumidor y productor al mismo tiempo, entonces la restricción presupuestal del consumidor se puede expresar como:

$$k_0 = \int_0^{\infty} c_t e^{-At} dt. \quad (4)$$

El problema de optimización resultante está determinado por (2) y (4), en cuyo caso las condiciones de primer orden están dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho, \quad (5)$$

donde $\mathcal{H} = \ln c_t + \lambda_t (Ak_t - c_t)$ es el Hamiltoniano y del cual resultan las siguientes condiciones de optimalidad:

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t, \quad (6)$$

$$\dot{k}_t = Ak_t - c_t, \quad (7)$$

$$A\lambda_t = -\dot{\lambda}_t + \rho\lambda_t, \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_t e^{-At} = 0. \quad (9)$$

En esta economía los niveles de equilibrio de consumo, capital y producto son respectivamente:

$$c_t = k_0 \rho, \quad (10)$$

$$k_t = k_0, \quad (11)$$

$$y_t = Ak_0, \quad (12)$$

en donde k_0 es el capital inicial. Se puede observar que el consumo depende de las preferencias de los individuos ρ , del capital inicial con que cuenta el aparato productivo y del coeficiente tecnológico de la economía A . Por su parte, el nivel del capital de

equilibrio sólo depende del capital inicial, mientras que el nivel de producto está en función del nivel tecnológico de la economía y del capital inicial. Como la tasa a la que crece el consumo, el capital y, por lo tanto del producto, depende de la diferencia $(A - \rho)$, entonces la tasa de crecimiento balanceado de la economía es:

$$\varphi = A - \rho. \quad (13)$$

El crecimiento es balanceado porque, una vez que se obtienen las dinámicas del consumo, $\dot{c}_t = c_t(A - \rho)$, y del capital, $\dot{k}_t = k_t(A - \rho)$, y en virtud de que la función de producción es de la forma $f(k_t) = Ak_t$, la tasa de crecimiento económico *per capita*, φ , cumple con:

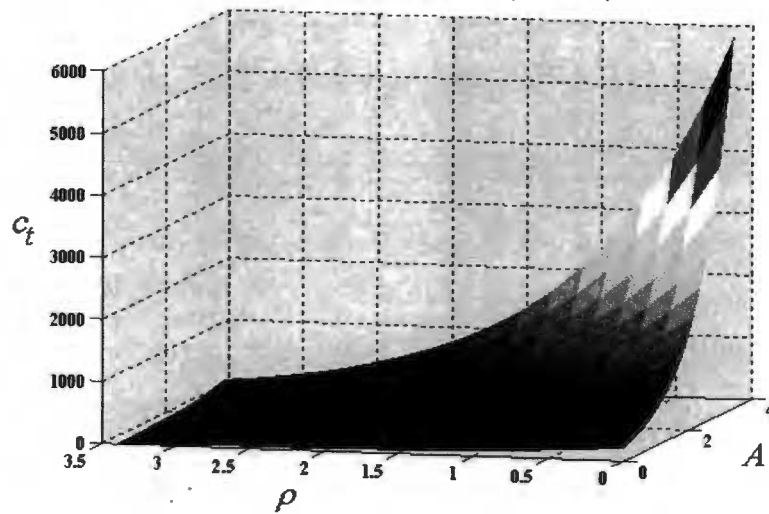
$$\varphi = \frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = A - \rho. \quad (14)$$

La conclusión parcial que nos da el modelo base consiste en que la tasa de crecimiento en todos los sectores de la economía depende del nivel tecnológico de la misma y de las preferencias de los individuos.

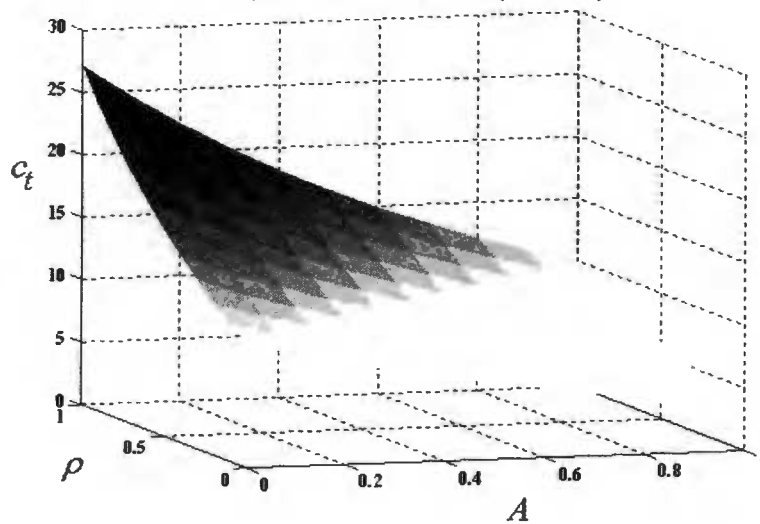
Por lo tanto, resulta evidente que si $A > \rho$, entonces todos los sectores crecen, mientras que si $A < \rho$, entonces decrecen. Observe que dicho crecimiento es balanceado ya que se presenta de igual manera en todos los sectores.

La Gráfica 4 muestra el comportamiento de la trayectoria del consumo, dada por las ecuaciones cuando (10) y (13), cuando $A > \rho$ y la Gráfica 5 cuando $A < \rho$. De manera similar, la Gráfica 6 muestra el comportamiento, establecido por las ecuaciones (11) y (13), de la trayectoria del capital cuando $A > \rho$ y, por su parte, la Gráfica 7 hace lo propio cuando $A < \rho$.

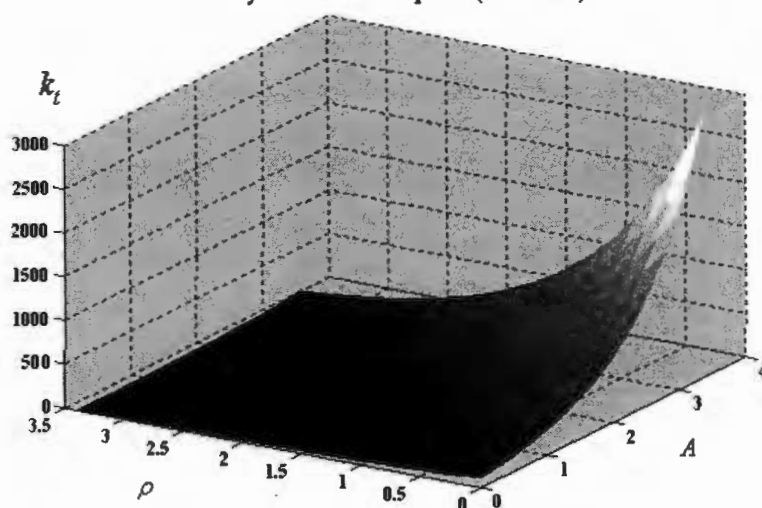
Gráfica 4
Trayectoria del Consumo ($A > \text{Rho}$).



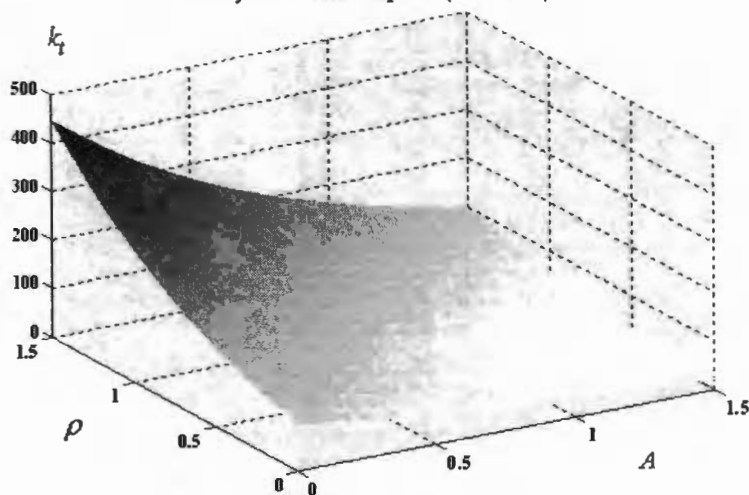
Gráfica 5
Trayectoria del Consumo ($A < \text{Rho}$).



Gráfica 6
Trayectoria del Capital ($A > \text{Rho}$).



Gráfica 7
Trayectoria del Capital ($A < \text{Rho}$).



En consecuencia, países con coeficientes tecnológicos altos crecen a tasas mayores. Estos resultados (modelo Ak) son bien conocidos, a pesar de ello, el desarrollo realizado tiene como objetivo enfatizar que una economía crecerá a un mayor ritmo si tiene un nivel tecnológico mayor. Lo anterior resulta pertinente porque en la presente investigación se analiza el efecto del cambio tecnológico vía el gasto gubernamental.

3.2. El gobierno generador del cambio tecnológico

Suponga ahora que el gobierno interviene en el desarrollo de tecnología afectando la productividad del capital al estilo Rivas-Aceves y Venegas-Martínez (2008), por lo que la función de producción toma la forma:

$$y_t = Agk_t, \quad (15)$$

en donde $g > 0$ es el gasto que el gobierno realizará como inversión en la tecnología, A representa el nivel tecnológico disponible en la economía, k_t es el capital físico y y_t es el producto. El problema de maximización del consumidor y sus condiciones de optimalidad correspondientes (de primer orden) son:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } \mathcal{U} &= \int_0^{\infty} \ln c_t e^{-\rho t} dt \\ \text{s. a. } \dot{k}_t &= Agk_t - c_t, \quad k_0 \text{ dado}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho, \quad (17)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_t e^{-(Ag)t} = 0, \quad (18)$$

donde c_t es el consumo, ρ es la tasa subjetiva de descuento, $\mathcal{H} = \ln c_t + \lambda_t (Agk_t - c_t)$ es el Hamiltoniano y λ_t es la variable de co-estado. Bajo estas condiciones, la trayectoria del consumo satisface:

$$c_t = \rho k_0 e^{(Ag-\rho)t}. \quad (19)$$

De lo anterior se desprende que el nivel de consumo de equilibrio depende del parámetro de preferencias ρ , del capital inicial k_0 y del gasto de gobierno g . Un aumento en las últimas dos variables incrementará el nivel de consumo. Por otro lado, se tiene que, si $Ag > \rho$, con $g > 1$, entonces el consumo crecerá a un mayor ritmo que en el caso en donde no interviene el gobierno. En caso contrario, es decir, si $Ag < \rho$,

entonces el consumo decrecerá. Es deseable que $g > 1$ ya que sólo así se cumple que $Ag > A$. De esta forma, si el gobierno invierte en tecnología, entonces éste puede influir en el crecimiento económico. Análogamente, la trayectoria del capital es:

$$k_t = k_0 e^{(Ag - \rho)t}. \quad (20)$$

Una vez más si $Ag > \rho$, entonces el capital crecerá. Lo contrario sucederá si $Ag < \rho$. Como se muestra, las trayectorias del consumo y del capital dependen de la tasa subjetiva de descuento, de la tecnología y del gasto de gobierno, por lo tanto la tasa de crecimiento *per capita* ahora estará dada por:

$$\gamma = \frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = Ag - \rho. \quad (21)$$

En consecuencia, la tasa de crecimiento en todos los sectores de la economía depende de la diferencia $Ag - \rho$, por lo que si $Ag > \rho$, todos los sectores crecen, mientras que decrecen si $Ag < \rho$. Observe que el crecimiento es balanceado. Por lo tanto, el impacto del gasto de gobierno sobre la tasa de crecimiento es positivo ya que $\gamma > \varphi$. A continuación se evalúa el impacto que tiene el gasto del gobierno, la tecnología y el capital inicial sobre el bienestar de los agentes. Para ello, se obtiene la función del bienestar económico, $\mathcal{W}$, la cual resulta de la sustitución del nivel óptimo de consumo en la función directa de utilidad, por lo que se tiene:

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty \ln(\rho k_0 e^{(Ag - \rho)t}) e^{-\rho t} dt. \quad (22)$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{W} = \frac{\ln(\rho k_0)}{\rho} + \frac{Ag - \rho}{\rho^2}. \quad (23)$$

De la ecuación anterior se deduce que el bienestar económico está en función del coeficiente tecnológico disponible A , del impacto del gobierno g , de las preferencias del individuo ρ y del capital inicial k_0 . Un aumento en el gasto de gobierno, como inversión

en tecnología, aumenta el bienestar. De esta manera, el gobierno no sólo participa en la generación de tecnología, sino que con ello incrementa, a su vez, el bienestar de los agentes. Lo anterior es debido a que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} = \frac{A}{\rho^2} > 0. \quad (24)$$

Por su parte, un aumento en la tecnología a través del parámetro A incrementará el bienestar, ya que se cumple con:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial A} = \frac{g}{\rho^2} > 0. \quad (25)$$

Evidentemente, se espera que en países con un mayor desarrollo tecnológico el nivel de bienestar económico sea más alto que en países tecnológicamente rezagados. Análogamente, un aumento en el capital inicial aumentará el bienestar económico de los agentes, toda vez que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial k_0} = \frac{1}{\rho k_0} > 0. \quad (26)$$

Por último, un incremento en la tasa subjetiva de descuento, lo cual se traduce en una mayor ansiedad por parte del individuo para consumir en el presente, deteriora el bienestar debido a que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \rho} = -\frac{2}{\rho^3} < 0. \quad (27)$$

En consecuencia, el bienestar aumentará conforme se tenga un aumento en el capital inicial, o en el gasto de gobierno, o si se da un aumento en el nivel de tecnología mediante el coeficiente A . Por otro lado, el bienestar disminuirá si aumenta la tasa subjetiva de descuento.

En resumen, el modelo muestra que la participación del gobierno en la generación de tecnología tiene un efecto positivo sobre el crecimiento y el bienestar de los hogares.

En este primer modelo base, el gasto de gobierno es constante y el origen de los recursos gubernamentales se desconoce, es decir, no existe restricción presupuestaria para el gobierno. Lo anterior pudiera resultar problemático toda vez que dicho gasto entra en la función de producción como un insumo más, utilizado por la empresa para producir. Por lo tanto, el gasto de gobierno debería ser una variable que depende del tiempo, ya que en la función de producción se está midiendo capital y producto en función del tiempo. Si el gasto de gobierno depende del tiempo, entonces el modelo no tiene estado estacionario, es decir una tasa de crecimiento constante, porque no se encuentra una trayectoria óptima para el gasto. Si el gasto de gobierno es constante, entonces existe estado estacionario pero no debería entrar en la función de producción. Por otro lado, la ausencia de una restricción presupuestal para el gobierno puede ocasionar que el gasto de gobierno, g , destinado a la generación de un cambio en las condiciones tecnológicas de la economía sea infinito. Sin embargo, el siguiente apartado muestra cómo si puede ser una constante, ya que sólo afecta al nivel tecnológico de la economía, A , sin afectar el estado estacionario de la economía, y resuelve el problema de la restricción presupuestal del gobierno.

3.3. El gasto de gobierno constante

Las condiciones establecidas en los dos apartados anteriores para la economía se mantienen para el modelo que a continuación se desarrolla, es decir, se trata de un modelo de crecimiento endógeno en donde el cambio tecnológico es generado por el gobierno, con rendimientos constantes a escala, rendimientos marginales decrecientes y agentes racionales con vida infinita. La economía no sostiene intercambios comerciales con otras economías, por lo que es cerrada. En esta economía, las empresas deciden no realizar actividades de investigación y desarrollo tecnológico, como consecuencia del

poco desarrollo de mercado, o debido a la ausencia de una institución que garantice los derechos de autor, patentes, etc., o por cualquier otra causa que genere que las empresas tengan la certeza de que dichas actividades no generarán ganancias adicionales. Por lo tanto, el gobierno es el único que interviene en las actividades de desarrollo de nuevas tecnologías, generando así un cambio tecnológico, a través de un gasto. De esta manera, la productividad del capital se ve afectada y en consecuencia la función de producción toma la forma:

$$y_t = A g_t k_t, \quad (28)$$

en donde $g_t > 0$ es el gasto *per capita* que el gobierno destina para la generación de nuevas condiciones tecnológicas, A representa el nivel tecnológico disponible en la economía, y_t es el producto y k_t es el capital físico. Nótese que aquí el gasto de gobierno depende del tiempo. Para que se dé el cambio tecnológico es necesario que $g_t > 1$, ya que sólo así se cumple que $A g_t > A$, al igual que antes. Asimismo se supone que cuando se gasta la totalidad del gasto se genera una mejora en las condiciones tecnológicas de la economía, es decir, no existe una parte del gasto que sea improductivo en el sentido de que no genere cambio tecnológico. El gobierno obtiene recursos por medio de un impuesto al consumo τ_c que destina en su totalidad para financiar la generación de nuevas tecnologías, por lo que, la restricción presupuestal del gobierno es:

$$g_t = \tau_c c_t, \quad (29)$$

Por su parte, los consumidores buscan maximizar el nivel de utilidad que obtienen gracias al consumo de un único bien perecedero, el cual está dado por:

$$U = \int_0^{\infty} \ln c_t e^{-\rho t} dt, \quad (30)$$

en donde c_t es el consumo *per capita* y $0 < \rho < 1$ es la tasa subjetiva de descuento que mide qué tan impaciente está un individuo por el consumo presente. La forma funcional de la utilidad, $u(c_t) = \ln c_t$, una vez más cumple con que $u'(c_t) > 0$ y $u''(c_t) < 0$. De manera adicional se supone que el consumidor es dueño de la empresa, por lo tanto, toma decisiones de producción y consumo simultáneamente. En consecuencia, la restricción presupuestal del consumidor está dada por:

$$k_0 = \int_0^{\infty} (1 + \tau_c) c e^{-r_t t} dt, \quad (31)$$

en donde k_0 es el capital inicial y es conocido, y r_t es la tasa de interés real. Como el objetivo de la empresa consiste en maximizar sus beneficios, dados por:

$$\Pi_t = y_t - r_t k_t, \quad (32)$$

y al sustituir (28) en (32), entonces dicha maximización muestra que $Ag_t = r_t$. Por lo tanto se puede reescribir (31) como:

$$k_0 = \int_0^{\infty} (1 + \tau_c) c e^{-Ag_t t} dt, \quad (33)$$

Las condiciones de primer orden (condiciones necesarias) para una solución interior resultantes del problema de optimización dado por (30) y (33) son:

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t (1 + \tau_c), \quad (34)$$

$$\dot{k}_t = Ag_t k_t - (1 + \tau_c) c_t, \quad (35)$$

$$Ag_t \lambda_t = -\dot{\lambda}_t + \lambda_t \rho, \quad (36)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_t e^{-(Ag_t)t} = 0. \quad (37)$$

Bajo estas condiciones los niveles de consumo, capital físico, producto y tasa de crecimiento (ψ_t) en el equilibrio macroeconómico, son:

$$c_t = \frac{\rho k_0}{(1 + \tau_c)} e^{(Ag_t - \rho)t}, \quad (38)$$

$$k_t = k_0 e^{(Ag_t - \rho)t}, \quad (39)$$

$$y_t = Ag_t k_0 e^{(Ag_t - \rho)t}, \quad (40)$$

$$\psi_t = Ag_t - \rho. \quad (41)$$

Se aprecia que el nivel de consumo depende de las preferencias de los individuos y del capital inicial de manera positiva, en consecuencia un incremento en cualquiera de estas variables conduce a un mayor consumo, mientras que depende del impuesto al consumo de forma negativa, por lo que, un aumento en el impuesto al consumo disminuye el mismo. Por su parte, el nivel de capital sólo está determinado por el capital inicial de la economía. El producto depende del nivel tecnológico existente en la economía, del gasto que el gobierno realice en desarrollo tecnológico y del capital inicial. Por último, la tasa de crecimiento económico depende del nivel tecnológico existente en la economía, del gasto de gobierno y de las preferencias de los individuos. La ecuación (41) muestra que la tasa de crecimiento es una función que depende del tiempo ya que el gasto de gobierno depende también del tiempo, lo que no sucede en el modelo base (véase ecuación 21). Dicha crecimiento es balanceado y será positivo siempre que se cumpla con:

$$\rho < Ag_t. \quad (42)$$

Una vez que se han determinado los óptimos, se encuentra la función de bienestar económico de los hogares, $\mathcal{W}$, a través de la sustitución de (38) en (30), la cual está dada por:

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty \ln \left(\frac{\rho k_0}{(1 + \tau_c)} e^{[Ag_t - \rho]t} \right) e^{-\rho t} dt. \quad (43)$$

En virtud de que la tasa de interés real es una variable que depende del tiempo, y al considerar que $Ag_t = r_t$, se puede definir lo siguiente:

$$R_t = \int_0^t r_s ds = A \int_0^t g_s ds = AG_t. \quad (44)$$

$$\dot{G}_t = g_t. \quad (45)$$

Por lo tanto, el bienestar económico de los hogares se puede reescribir como:

$$\mathcal{W} = \int_0^{\infty} \left[\ln \left(\frac{\rho k_0}{(1 + \tau_c)} \right) + A \int_0^t g_s ds - \rho t \right] e^{-\rho t} dt, \quad (46)$$

equivalentemente,

$$\mathcal{W} = \int_0^{\infty} \left[\ln \left(\frac{\rho k_0}{(1 + \tau_c)} \right) + A G_t - \rho t \right] e^{-\rho t} dt. \quad (47)$$

En consecuencia, el bienestar económico depende de las preferencias de los individuos, del capital inicial, del nivel tecnológico de la economía y de las variables de decisión del gobierno, gasto e impuesto al consumo. Hasta este momento se conocen sólo las condiciones de equilibrio del sector privado pero no así del sector público, por lo que, a continuación se determina el comportamiento del gasto. En otras palabras, se encuentra el estado estacionario del modelo. El gobierno, debido a su carácter altruista, tiene el interés de determinar el nivel óptimo de su gasto tal que el bienestar económico de los hogares, $\mathcal{W}$, sea el máximo posible. Si se sustituye el nivel de consumo óptimo dado por la ecuación (38) en (29), entonces la restricción del gobierno es:

$$g_t = \left[\tau_c \frac{\rho k_0}{(1 + \tau_c)} \right] e^{[A g_t - \rho]t}, \quad (48)$$

y de manera análoga, cuando se sustituye (44) y (45) en (48) se encuentra que:

$$0 = \dot{G}_t - \left(\frac{\tau_c \rho k_0}{(1 + \tau_c)} \right) e^{A G_t - \rho t}. \quad (49)$$

Por lo tanto, el problema de optimización del gobierno consiste en maximizar (47) sujeto a (49), y mediante la ecuación de Euler-Lagrange (condición de primer orden) se obtiene:

$$A e^{-\rho t} - \lambda_t A \left(\frac{\tau_c \rho k_0}{(1 + \tau_c)} \right) e^{A G_t - \rho t} - \dot{\lambda}_t = 0. \quad (50)$$

Si el gobierno considera el costo social de su gasto de la forma $\lambda_t = \lambda_0 e^{-A t}$, y al renombrar $\left(\frac{\tau_c \rho k_0}{(1 + \tau_c)} \right) = B$, entonces de la ecuación (50) resulta que:

$$G_t = t + \frac{\rho t}{BA} - \frac{t}{B} + \frac{1}{BA\lambda_0} + \frac{1}{BA} - \frac{1}{A}. \quad (51)$$

En consecuencia, el gasto de gobierno que destinará a las actividades de investigación y desarrollo tecnológico, al tomar en cuenta (45), es:

$$g_t = g = 1 + \frac{\rho}{BA} - \frac{1}{B}. \quad (52)$$

La ecuación anterior ya muestra que el gasto de gobierno necesario para generar un cambio en las condiciones tecnológicas de la economía en realidad es constante, bajo las hipótesis aquí planteadas. Para que el gasto sea mayor a la unidad bajo las condiciones establecidas por la ecuación (52) y así lograr el cambio tecnológico, es necesario que se cumpla que $A > \rho$, es decir, que la economía esté creciendo. Con esa cantidad de gasto, el nuevo nivel tecnológico, la tasa de crecimiento y el producto de la economía son respectivamente:

$$Ag = \hat{A} = A + \frac{(1 + \tau_c)(\rho - A)}{\tau_c \rho k_0}, \quad (53)$$

$$\psi = \hat{A} - \rho, \quad (54)$$

$$y_t = \hat{A} k_0 e^{(\hat{A} - \rho)t}. \quad (55)$$

Evidentemente $\hat{A}$ representa las nuevas condiciones tecnológicas de producción en la economía debido al salto en las mismas ocasionado por la participación del gobierno, por lo que, el nivel tecnológico y la tasa de crecimiento son mayores. Asimismo, el producto, el consumo y el capital presentan trayectorias mayores que las correspondientes en ausencia del gobierno, debido a (54). De manera similar, si ahora el gobierno considera el costo social de su gasto de la forma $\lambda_t = \lambda_0 e^{-\rho A t}$, entonces:

$$G_t = \rho t + \frac{\rho^2 t}{BA} - \frac{\rho^2 t}{B} + \frac{1}{BA\lambda_0} + \frac{\rho}{BA} - \frac{1}{A}, \quad (56)$$

y

$$g_t = g = \rho + \rho^2 \left(\frac{1-A}{AB} \right), \quad (57)$$

en donde $A < 1$ se tiene que cumplir para que $g > 1$, sin importar si la economía está creciendo o no. Por lo tanto, el nuevo nivel tecnológico, la tasa de crecimiento y el producto son:

$$Ag = \tilde{A} = A\rho + A\rho^2 \left(\frac{(1+\tau_c)(1-A)}{A\tau_c\rho k_0} \right), \quad (58)$$

$$\psi = \tilde{A} - \rho, \quad (59)$$

$$y_t = \tilde{A}k_0 e^{(\tilde{A}-\rho)t}. \quad (60)$$

De igual manera el nivel tecnológico, el crecimiento y el producto son mayores que en ausencia del gobierno, con lo que el salto en las condiciones tecnológicas se vuelve a dar. Por último, si el gobierno considera que $\lambda_t = \lambda_0 e^{A-\rho t}$, en consecuencia se obtiene que:

$$G_t = \frac{\rho t}{A} + \frac{\rho t}{BA} - t - \frac{t}{B} + \frac{\rho}{A^2 B} + \frac{1}{BA\lambda_0} + \frac{1}{BA} - \frac{1}{A}, \quad (61)$$

y

$$g_t = g = \left(\frac{B+1}{B} \right) \left(\frac{\rho-A}{A} \right). \quad (62)$$

Para que $g > 1$ es necesario que $A < \rho < 1$, en cuyo caso el nuevo nivel tecnológico, la tasa de crecimiento y el producto son:

$$Ag = \check{A} = \frac{\left(\frac{\tau_c \rho k_0}{(1+\tau_c)} + 1 \right) (\rho - A)}{\frac{\tau_c \rho k_0}{(1+\tau_c)}}, \quad (63)$$

$$\psi = \check{A} - \rho, \quad (64)$$

$$y_t = \check{A}k_0 e^{(\check{A}-\rho)t}. \quad (65)$$

Análogamente se cumple que el nivel tecnológico, el crecimiento y el producto son mayores que en ausencia del gobierno. El modelo propuesto muestra el efecto positivo

sobre el crecimiento debido al gasto gubernamental en investigación y desarrollo tecnológico, toda vez que genera un salto en las condiciones tecnológicas de la economía. Además, el gasto de gobierno como magnitud constante crea un cambio tecnológico, por lo que las condiciones de producción se modifican, que se ve traducido en una mayor productividad marginal del capital. El modelo tiene estado estacionario y el gobierno tiene una restricción presupuestal que evita destinar recursos infinitos a la investigación y desarrollo de nuevas tecnologías, encontrando así soluciones cerradas para los óptimos.

Asimismo, el modelo permite verificar que el gasto de gobierno, como magnitud constante, tiene un efecto positivo sobre el crecimiento y maximiza el bienestar de los hogares. En lo subsecuente, los modelos analizados en esta investigación utilizan las hipótesis planteadas respecto al comportamiento del gobierno en las actividades de investigación y desarrollo tecnológico, replicando los resultados encontrados en este apartado.

3.4. Gasto de gobierno en una economía monetaria

A continuación, en el marco de una economía monetaria en donde el dinero entra a través de dos motivos: para el financiamiento del consumo, es decir motivo transacción, (Clower, 1967) y como argumento en la función de utilidad, es decir motivo reserva de valor, (Patinkin 1956 y Sidrauski 1967), se analiza el impacto que tiene el gasto de gobierno en generación de tecnología sobre la tasa de crecimiento económico.

Se introduce el dinero en la economía a través del supuesto de que el agente representativo mantiene saldos reales con el objetivo de financiar su consumo debido a que “el dinero compra bienes, los bienes compran dinero, pero los bienes no compran bienes”; véase Blanchard (1998). De esta manera, el dinero se incorpora bajo la forma

del motivo transacción. Sean $m_t = M_t/P_t$ los saldos reales *per capita* y π el costo por la tenencia de saldos reales, entonces la restricción presupuestal del individuo toma la siguiente forma:

$$\dot{m}_t + \dot{k}_t = Agk_t - c_t - \pi m_t. \quad (66)$$

Si se supone también que el total de la riqueza real del individuo está dada por la suma de su capital y sus saldos monetarios, es decir, $a_t = m_t + k_t$, entonces se tiene:

$$\dot{m}_t + \dot{k}_t = Agk_t + Agm_t - Agm_t - c_t - \pi m_t. \quad (67)$$

Equivalentemente,

$$\dot{a}_t = Aga_t - c_t - (Ag + \pi)m_t. \quad (68)$$

A continuación se incorpora una restricción del tipo *cash-in-advance*, propuesta por Clower (1967), a saber:

$$m_t = \int_t^{t+\alpha} c_s ds, \quad (69)$$

donde α es el tiempo en que el dinero debe ser mantenido para financiar el consumo, observe que:

$$m_t = \int_t^{t+\alpha} c_s ds \approx \alpha c_t + o(\alpha). \quad (70)$$

En lo que sigue, se supondrá que el término del error $o(\alpha)$ es despreciable, en cuyo caso $m_t = \alpha c_t$, es decir, se requieren saldos reales para financiar consumo durante el tiempo α . En consecuencia, al sustituir dicha condición en la restricción presupuestal, se obtiene:

$$\dot{a}_t = Aga_t - [1 + (\alpha Ag + \alpha \pi)]c_t. \quad (71)$$

Por lo tanto, el problema de maximización de utilidad del individuo correspondiente está dado por las ecuaciones (30) y (71), cuyas condiciones de primer orden y condición de transversalidad respectivamente son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = \dot{a}_t, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho, \quad (72)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-(Ag)t} = 0. \quad (73)$$

El Hamiltoniano resultante es $\mathcal{H} = \ln c_t + \lambda_t \{Ag a_t - [1 + \alpha(Ag + \pi)]c_t\}$. En el equilibrio macroeconómico, los niveles de consumo y riqueza óptimos, junto con la tasa de crecimiento son:

$$c_t = \frac{\rho a_0}{[1 + \alpha(Ag + \pi)]} e^{(Ag - \rho)t}, \quad (74)$$

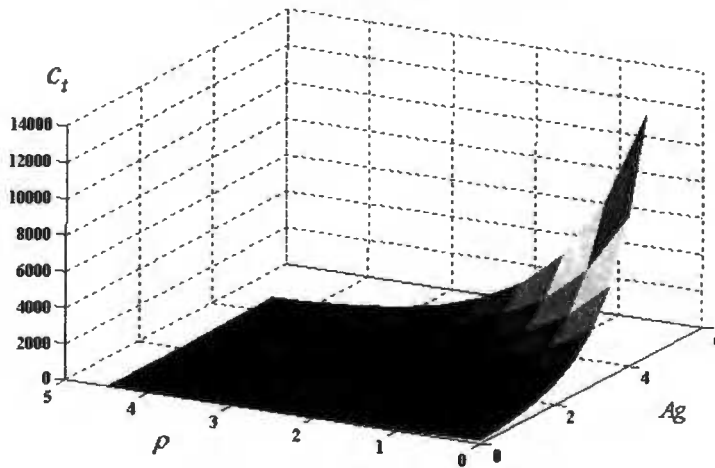
$$a_t = a_0 e^{(Ag - \rho)t}, \quad (75)$$

$$\psi = Ag - \rho. \quad (76)$$

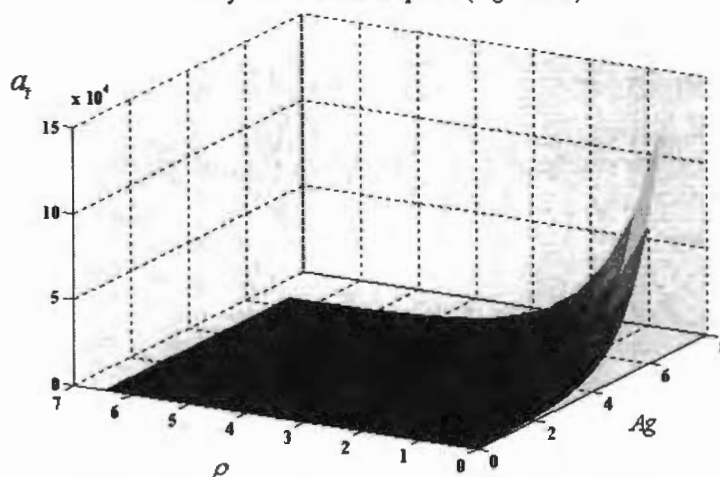
El consumo depende de la riqueza inicial, del parámetro de preferencias, del nivel de tecnología, del gasto de gobierno, de la proporción de saldos reales que se mantenga y de la inflación. La riqueza depende solamente del nivel de riqueza inicial. Como es de esperarse, las trayectorias óptimas del consumo y de la riqueza aumentan cuando $Ag > \rho$, y disminuyen cuando $Ag < \rho$. Las Gráficas 8 y 9 muestran el primer caso.

Gráfica 8

Trayectoria del Consumo ($Ag > \rho$).



Gráfica 9
Trayectoria de la Riqueza ($Ag > \rho$)



En consecuencia el crecimiento económico balanceado de la economía sigue siendo:

$$\psi = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{a}_t}{a_t} = Ag - \rho. \quad (77)$$

Dicho crecimiento no depende de la tasa de crecimiento de los saldos reales por lo que el dinero es neutral. Ahora se determina el nivel óptimo de gasto de gobierno tal que el bienestar de los hogares es el máximo posible, para ello se obtiene la función del bienestar mediante la sustitución del consumo óptimo en la función de utilidad, lo cual conduce a:

$$\mathcal{W} = \int_0^{\infty} \left\{ \ln \frac{\rho a_0}{[1 + (\alpha Ag + \alpha \pi)]} e^{(Ag - \rho)t} \right\} e^{-\rho t} dt. \quad (78)$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{W} = \ln \frac{\rho a_0}{[1 + (\alpha Ag + \alpha \pi)]} + \frac{Ag - \rho}{\rho^2}. \quad (79)$$

Para encontrar dicho nivel óptimo de g , se deriva la función $\mathcal{W}$ con respecto de g y se iguala a cero. Por lo tanto, se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} = -\frac{a_0 \alpha A}{g} + \frac{A}{\rho^2} = 0. \quad (80)$$

Si se despeja g se obtiene:

$$g = a_0 \alpha \rho^2. \quad (81)$$

En consecuencia, el nivel óptimo del gasto de gobierno está en función de la riqueza inicial de los individuos a_0 , de la proporción de dinero que éstos utilicen para financiar su consumo α y del parámetro de preferencias ρ . Por lo tanto, como el gobierno conoce la riqueza inicial de los individuos, la proporción de saldos reales que éstos mantienen y sus preferencias, entonces sabe exactamente cuál es el gasto óptimo de inversión en tecnología que permitirá tener una mayor tasa de crecimiento; evidentemente, se requiere que $g > 1$ para generar un cambio positivo en las condiciones tecnológicas. Además, dicha tasa será igual en todos los sectores lo que generará un crecimiento balanceado.

Si ahora se hace el supuesto de que al agente representativo le genera satisfacción mantener saldos reales en su poder (por sus servicios de liquidez), entonces el dinero se debe introducir en la función de utilidad (Sidrausky, 1967). La función de utilidad es estrictamente cóncava y ambas mercancías son no inferiores, por lo tanto:

$$u = \int_0^\infty (\ln c_t + \beta \ln m_t) e^{-\rho t} dt, \quad (82)$$

en donde $\beta > 0$ es la proporción de utilidad generada al individuo debido a la tenencia de saldos reales, y como ahora ya no se tiene una restricción *cash-in-advance*, entonces la restricción presupuestal del individuo queda como se había planteado previamente (véase ecuación 68). Por lo anterior, el problema de maximización del individuo representativo está dado por (82) y (68), y sus condiciones de primer orden junto con la condición de transversalidad son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = a_t, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho, \quad (83)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-(\rho g)t} = 0. \quad (84)$$

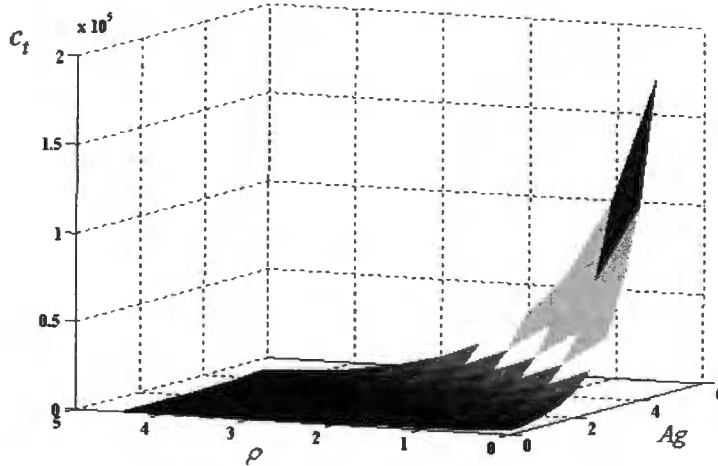
El Hamiltoniano correspondiente es $\mathcal{H} = \ln c_t + \lambda_t [Aga_t - (Ag + \pi)m_t - c_t]$, y las trayectorias de consumo y de saldos reales óptimas son, respectivamente:

$$c_t = \frac{\rho a_0}{\beta + 1} e^{(Ag - \rho)t}, \quad (85)$$

$$m_t = \frac{\rho a_0 - 1}{Ag + \pi} e^{(Ag - \rho)t}, \quad (86)$$

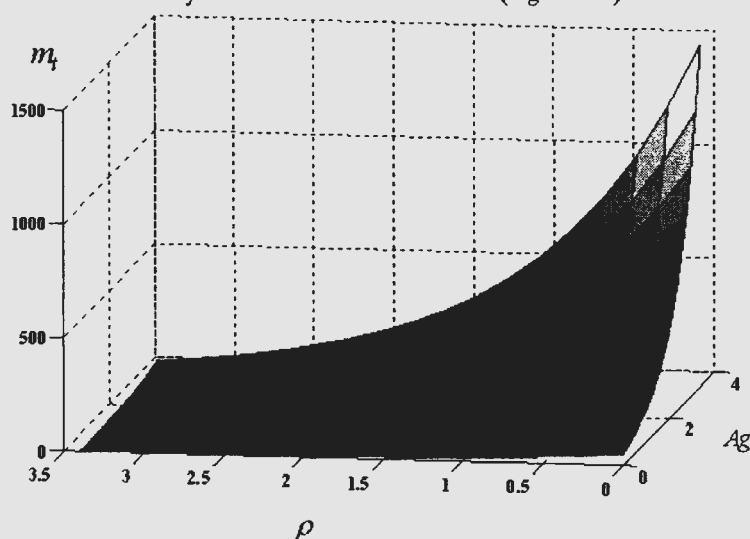
Como se puede apreciar, la tasa de crecimiento es la misma utilizando el motivo transacción o el motivo reserva de valor. El consumo depende de la riqueza inicial y de la tasa subjetiva de descuento, mientras que los saldos reales dependen de la riqueza inicial, del nivel de tecnología, del gasto de gobierno y de la inflación. Es importante señalar se requiere suponer que $\rho a_0 > 1$ a fin de garantizar que $m_t > 0$. Una vez más la tasa de crecimiento es balanceada ya que tanto consumo como saldos reales crecen a la tasa dada por (77). La representación del comportamiento de las demandas de consumo y saldos reales se muestran, respectivamente, en las Gráficas 10 y 11.

Gráfica 10
Trayectoria del Consumo ($Ag > \text{Rho}$).



Gráfica 11

Trayectoria de los Salos Reales ($Ag > Rho$).



Los resultados obtenidos señalan que el dinero es neutral, lo que concuerda con los resultados obtenidos en estado estacionario por Sidrausky (1967). En este documento el estado estacionario no se analiza por lo que la no neutralidad encontrada por Reis (2001) no se puede refutar. Por otro lado Fischer (1979) encontró que la tasa de crecimiento del dinero afecta a la tasa de acumulación de capital y por lo tanto a la tasa de crecimiento económico, en consecuencia el dinero es no neutral. Aunque es importante señalar que la diferencia existente entre el modelo de Sidrausky y el de Fischer consiste en que en el primero se supone expectativas adaptativas y en el segundo expectativas racionales (Asako 1983).

Una vez que el individuo ha decidido cuáles son sus niveles óptimos de consumo y saldos reales, se necesita elegir cuál es el nivel óptimo de gasto de gobierno, por lo que se debe obtener la función de bienestar sustituyendo dichos óptimos en la función de utilidad, en este caso se encuentra que:

$$W = \int_0^{\infty} \left\{ \ln \left[\frac{\rho a_0}{\beta + 1} e^{(Ag - \rho)t} \right] + \beta \ln \left[\frac{\rho a_0 - 1}{Ag + \pi} e^{(Ag - \rho)t} \right] \right\} e^{-\rho t} dt. \quad (87)$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{W} = \ln \left[\frac{a_0}{(\beta + 1)} \right] + \frac{Ag - \rho}{\rho^2} + \beta \ln \frac{\rho a_0 - 1}{(Ag + \pi)\rho} + \frac{Ag - \rho}{\rho^2}. \quad (88)$$

Para obtener el gasto óptimo del gobierno, tal que el bienestar de los hogares es el mayor posible, se obtiene la derivada de la función $\mathcal{W}$ con respecto de g y se iguala a cero, por lo que se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} = 2 \frac{A}{\rho^2} - \frac{\beta}{Ag\rho} = 0. \quad (89)$$

Al despejar g , se tiene que el nivel óptimo del gasto de gobierno es:

$$g = \frac{\beta\rho}{2A^2}. \quad (90)$$

Se concluye que el nivel de gasto óptimo depende de parámetro de preferencias ρ , del nivel de la tecnología A y de la utilidad que le proporciona la tenencia de saldos reales al individuo β . Asimismo, la tasa de crecimiento económico no depende de la tasa de expansión monetaria por lo que el dinero es neutral.

En resumen, se ha desarrollado un modelo de agente representativo con vida infinita en donde se incorporan la participación del gobierno a través de la inversión en tecnología y la emisión de dinero. Uno de los principales resultados obtenidos es que cuando el gobierno participa en la generación de tecnología, con ello incrementa también el bienestar de los agentes. Otro resultado relevante es que la tasa de crecimiento económico no depende de la tasa de expansión monetaria, es decir, el dinero es neutral.

Dado que el crecimiento, el cual es balanceado, depende del gasto de gobierno, se concluye que el gobierno tiene fuertes incentivos en participar en la generación de tecnología ya que con ello también afecta los otros sectores. Se encontró además que el gasto de gobierno óptimo que genera el mayor bienestar posible depende de la riqueza

inicial y de los parámetros de preferencias de los individuos, así como de la cantidad de dinero que los individuos tengan en su poder.

Por otro lado, al incorporar el dinero en la función de utilidad al agente, se obtuvo una vez más que la tasa de crecimiento de la economía no es afectada por la tasa de expansión monetaria, lo que significa que existe neutralidad del dinero. En este caso, el gasto óptimo que debe realizar el gobierno para generar un crecimiento económico y, por ende, una mejora en el bienestar está en función de la tecnología, de las preferencias y de la utilidad del dinero por sus servicios de liquidez. En cualquiera de las versiones que se utilizaron para incorporar el dinero se tiene que la tasa de crecimiento de la economía es independiente de la tasa de expansión monetaria, por lo tanto se comprueba que el dinero es neutral.

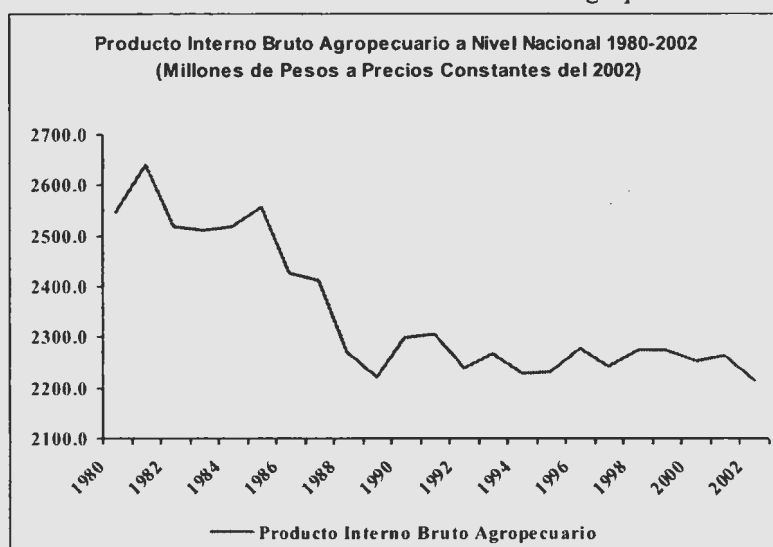
Hasta el momento, en los modelos ya descritos, se ha mostrado que existen beneficios debido a la participación del gobierno en las actividades económicas a través de la investigación, generación o desarrollo de nuevas tecnologías. Dichos beneficios se pueden ver de manera más aplicada y a la economía mexicana en el siguiente apartado, en donde al reformular los modelos se hacen comparaciones directas en el nivel de producto que muestran los impactos positivos generados por el gobierno.

3.5. Gasto de gobierno, una aplicación

Uno de los principales motores del crecimiento de la economía mexicana hasta mediados del siglo XX fue el sector agropecuario. En aquella época tuvo lugar el avance económico más importante del país conocido como el milagro mexicano. Sin embargo, en las últimas décadas dicho sector ha disminuido notablemente su participación en el crecimiento económico del país, como se puede apreciar en la Gráfica 12. Como consecuencia, el porcentaje de participación del sector agropecuario

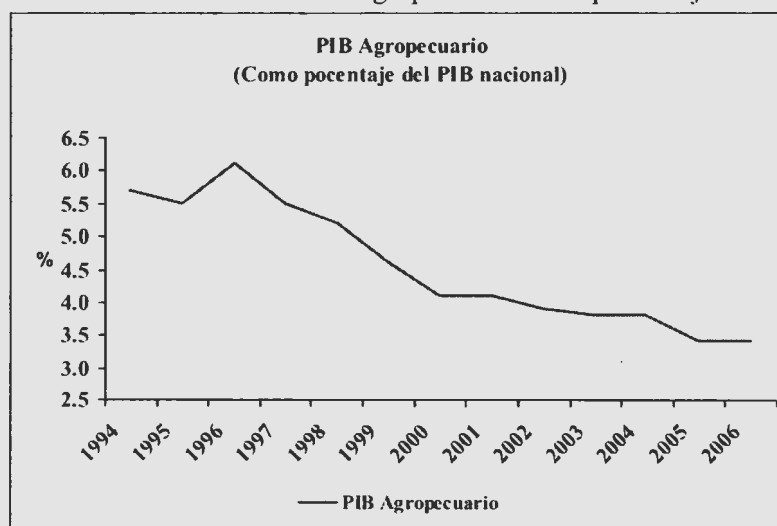
en el PIB a nivel nacional, en la última década, también presenta una trayectoria decreciente, tal y como lo muestra en la Gráfica 13. Este comportamiento se mantiene a pesar de que la producción a nivel nacional, en términos físicos del sector agropecuario se ha incrementado dentro del mismo periodo, como se ve en la Gráfica 14.

Gráfica 12. Producto Interno Bruto del sector agropecuario



Fuente: Datos históricos del informe de gobierno 2006.

Gráfica 13. Producto Interno Bruto agropecuario como porcentaje del PIB total



Fuente: Datos históricos del informe de gobierno 2006.

Gráfica 14. Producción agropecuaria nacional



Fuente: Elaboración propia con datos históricos del informe de gobierno 2006.

En particular, la Cuenca del Pacífico de la República Mexicana, la cual está integrada por Baja California, Sonora, Sinaloa, Nayarit, Colima, Michoacán, Jalisco, Guerrero, Oaxaca y Chiapas, ha alcanzado en años recientes un crecimiento medio del PIB cercano al 1%, principalmente por el crecimiento medio de Baja California Sur, Jalisco y Sonora, tal y como se muestra en el Cuadro 10.

El análisis realizado hasta este momento, tiene como objetivo establecer la posible relación existente entre el sector agropecuario y el agroindustrial, debido al inestable crecimiento que presenta la agroindustria en nuestro país⁸. Como las agroindustrias son talleres o fabriles en las cuales se desarrollan procesos de carácter artesanal o industrial destinados a la transformación de productos provenientes de cualquier actividad agrícola, ganadera o pecuaria, entonces una caída del producto en el

⁸ La inestabilidad en el crecimiento de la agroindustria se puede verificar analizando la trayectoria que presenta el índice de volumen físico de la producción, por rama de actividad económica, del sector manufacturero con 1993 como año base. Dicho índice es un indicador estadístico que mide la evolución mensual de los volúmenes de la producción física de los bienes elaborados al interior del sector, y que refleja la tendencia o variación producida en el corto plazo. Para ello, es necesario utilizar las series de tiempo que presenta el INEGI respecto de las 12 ramas, señaladas en el texto, que componen a la agroindustria.

sector agropecuario puede conducir a una disminución en las actividades agroindustriales, lo cual se vería reflejado de manera negativa en el crecimiento de este sector.

Cuadro 10. Producto Interno Bruto Agropecuario a Precios Corrientes

Entidad	1999	2000	2001	2002	2003	2004	TCPA
Baja California	2,915,890	2,801,774	2,628,956	2,854,679	3,103,894	4,664,775	1.08
Baja California Sur	1,114,859	1,313,377	1,496,364	1,702,864	2,048,550	2,360,721	1.13
Chiapas	7,489,635	8,570,934	7,555,225	8,257,320	8,842,460	9,918,170	1.05
Colima	1,846,396	1,977,318	1,575,714	1,807,761	1,860,325	1,991,998	1.01
Guerrero	5,559,777	6,321,184	6,126,551	6,129,790	6,969,733	6,757,624	1.03
Jalisco	16,539,746	19,385,541	22,726,290	23,092,365	23,721,217	25,958,593	1.08
Michoacán de Ocampo	18,157,022	13,873,678	14,897,382	13,920,385	16,289,538	17,131,144	0.99
Nayarit	3,677,575	3,515,271	4,338,730	4,438,320	3,652,535	4,384,613	1.03
Oaxaca	7,308,282	8,400,178	8,983,815	8,986,032	8,659,182	9,090,596	1.04
Sinaloa	10,988,639	14,304,276	13,754,666	14,819,713	15,110,608	20,616,009	1.11
Sonora	8,947,680	9,041,111	10,705,025	11,610,599	13,043,011	12,395,025	1.06
Total de la región	84,545,501	89,504,642	94,788,718	97,619,828	103,301,053	115,269,268	1.05

Fuente: INEGI. Sistema de Cuentas Nacionales de México.

Es importante recordar que, la agroindustria se ubica dentro de la industria manufacturera en la división de alimentos procesados y bebidas, y que está formada por 12 ramas, a saber; carnes y lácteos, frutas y legumbres, molienda de trigo, molienda de nixtamal, beneficio y molienda de café, azúcar, aceites y grasas comestibles, alimentos para animales, otros productos alimenticios, bebidas alcohólicas, cerveza y malta, refrescos y aguas gaseosas. Por lo tanto, los productos agrícolas que se generan en la Cuenca del Pacífico Mexicano, y que se utilizan al interior de estas ramas, constituyen un factor importante para el crecimiento del sector agroindustrial. Lo anterior, debido a

que esta región cuenta con una vasta superficie fértil, lo que permite una vasta producción de diversos productos agrícolas. El siguiente cuadro muestra los principales bienes agrícolas que son producidos en esta región.

Cuadro 11. Principales productos agrícolas de la Cuenca del Pacífico Mexicano

Baja California	Uva, algodón, olivo y dátiles
Sonora	maíz, trigo, chile y tabaco
Sinaloa	Jitomate, tomate, caña de azúcar, maíz, frijol y hortalizas
Nayarit	Mango, caña de azúcar y chile
Colima	Limón, mango, coco, caña de azúcar y melón
Michoacán	Aguacate, maíz, frijol, plátano, mango limón y coco
Jalisco	Maíz, frijol, chile y agave
Guerrero	Mango, coco, limón, frijol y maíz
Oaxaca	Piña, agave, limón, ajonjolí, caña de azúcar y maíz
Chiapas	Aguacate, café, caña de azúcar, maíz y cacao

Debido a la gran diversidad de bienes agrícolas que pueden ser producidos en esta región, el número de unidades de producción agropecuaria ha aumentado en años recientes. De acuerdo al Censo Agrícola más reciente, aproximadamente, el 46% del total de unidades de producción rurales realizan actividades agropecuarias. En consecuencia, al aumentar las unidades productivas, la utilización de los insumos que intervienen en dicha producción como la superficie agrícola sembrada y la mano de obra agropecuaria se han incrementado. El Cuadro 12 presenta la superficie agrícola sembrada medida en hectáreas, la mano de obra utilizada en actividades agropecuarias y el número de hogares que se dedican a dichas actividades, todo dentro de la región de la Cuenca del Pacífico.

Cuadro 12. Unidades de producción, superficie agrícola y mano de obra

Entidad	Total de unidades de producción rurales	Unidades de producción rural con actividad agropecuaria	Número de viviendas con actividad agropecuaria	Superficie agrícola (HA)	Total de mano de obra agropecuaria empleada
Baja California	14724	10327	20000	297518.71	43723
Baja California Sur	7342	4920	8605	97552.84	16803
Colima	16247	13301	19181	216021.49	28896
Chiapas	307742	306320	67718	2439776.28	509540
Guerrero	218795	200810	82277	1082670.45	435320
Jalisco	179535	152513	79670	1675564.21	295285
Michoacán de Ocampo	226941	182007	105368	1330908.45	424591
Nayarit	66146	60596	36932	460306.22	118215
Oaxaca	368399	341163	67745	1455034.66	638870
Sinaloa	117501	94865	95015	1334501.31	164702
Sonora	51613	41817	64005	1241812.94	101927
Total de la región	1408639	646516	11631667.6	2777872	1574985

Fuente: Elaboración propia con datos del VII Censo Agrícola-Ganadero 1991.

Ahora bien, las unidades de producción agrícola requieren de tecnología eficiente, es decir, maquinaria y equipo para poder realizar estas actividades productivas, lo cual significa una inversión importante especialmente para la zona sur de la Cuenca del Pacífico, es decir, para estados como Michoacán, Guerrero, Oaxaca y Chiapas. De acuerdo con el INEGI sólo el 48% del total de las unidades productivas de la región cuenta con algún vehículo para transporte de productos, tal y como se puede apreciar en el siguiente cuadro.

Cuadro 13. Unidad de producción con actividad agropecuaria según existencias de vehículos y tractores

Entidad	Unidades de producción con vehículos o tractores	Unidades de producción con camionetas de menos de 2 toneladas	Unidades de producción con camionetas de más de 2 toneladas	Unidad de producción con tractores en funcionamiento	Unidades sin estos vehículos
Baja California	8457	7684	2681	4455	2383
Baja California Sur	3342	3108	563	1008	1853
Colima	6288	5376	1689	1569	7292
Chiapas	18262	12311	5736	4872	289993
Guerrero	9598	6641	2923	1375	194173
Jalisco	67045	57856	13155	18948	87956
Michoacán de Ocampo	49377	38747	11660	13373	135785
Nayarit	16538	12077	4428	4675	45027
Oaxaca	12412	7262	4726	3142	331762
Sinaloa	29419	22818	5616	11354	66439
Sonora	22484	20277	5270	9360	20625
Total de la región	243222	194157	58447	74131	1183288

Fuente: Elaboración propia con dato del VII Censo Agrícola-Ganadero 1991.

En conclusión, existen dos posibles alternativas en materia de política tecnológica gubernamental que pueden resolver la problemática del crecimiento en la agroindustria. La primera consiste en, a través de un impulso tecnológico, promover la productividad agropecuaria para incrementar la producción de bienes agropecuarios que son utilizados como insumos al interior del aparato industrial, y con ello contrarrestar la tendencia inestable del sector agroindustrial. La segunda radica en aplicar el impulso tecnológico directamente en la agroindustria. Uno de los principales factores que pueden influir en el crecimiento agroindustrial se encuentra en la participación del gobierno a nivel estatal como impulsor del avance tecnológico, de tal forma que permita incrementar las

capacidades productivas y la eficiencia de las unidades económicas que pertenecen a la agroindustria.

Diversos programas federales como: Alianza para el Campo, Fondo Instituido en Relación a la Agricultura (FIRA), Fideicomiso de Riesgo Compartido (FIRCO), etc., en cierta medida, han alentado este crecimiento. Sin embargo, queda mucho por hacer, en específico en lo que se refiere a la participación de los gobiernos estatales como agentes impulsores de la tecnología en la agroindustria a nivel de unidad productiva. Cualquiera de las dos alternativas antes mencionadas, para generar un mayor crecimiento económico en la agroindustria, es congruente con el modelo que a continuación se desarrolla.

Con el objetivo de modelar la intervención gubernamental como un motor impulsor del avance tecnológico en la agroindustria, se establecen en forma breve las condiciones básicas de un modelo de crecimiento endógeno para una economía que produce un solo bien y que está poblada por consumidores con preferencias y dotaciones idénticas, los cuales tienen vida infinita y desean, como objetivo fundamental, maximizar su satisfacción por el consumo del bien en cuestión. Se supone que el nivel de satisfacción se puede medir mediante:

$$u = \int_0^{\infty} u(c)e^{-\rho t} dt, \quad (91)$$

en donde c es el consumo *per capita* y ρ es el parámetro que mide qué tan ansioso está un individuo por el consumo presente, es decir, es la tasa subjetiva de descuento. Para hacer la notación más sencilla se elimina el subíndice t de las variables, sin embargo se trata de variables que siguen dependiendo del tiempo en todo momento. La utilidad de cada uno de los individuos es de la forma:

$$u(c) = \ln c. \quad (92)$$

La forma funcional de la utilidad, al igual que antes, presenta rendimientos marginales decrecientes y la función de producción presenta rendimientos constantes a escala en el único insumo (el capital físico), la cual se mantiene, es decir:

$$f(k) = Tk, \quad (93)$$

en donde $T > 0$ representa el nivel tecnológico disponible en la economía, adicionalmente T es el producto marginal del capital. La omisión de la fuerza laboral como insumo adicional en el presente análisis, obedece a que sólo resulta de interés, por el momento, analizar los aspectos tecnológicos de la economía. En consecuencia, los individuos pertenecientes a la economía hasta aquí descrita se enfrentan al siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } \mathcal{U} &= \int_0^{\infty} \ln c e^{-\rho t} dt \\ \text{s. a. } \dot{k} &= Tk - c, \quad k_0 \text{ dado.} \end{aligned} \quad (94)$$

Las condiciones de producción antes definidas permiten expresar la restricción presupuestal de los individuos en función de los ingresos, que éstos obtienen por la venta de su producto y de los gastos que realizan. Al suponer que los precios del bien de consumo son iguales a la unidad, es decir $P = 1$, se obtiene que Tk mide el nivel de ingresos de los agentes, mientras que el nivel de consumo c de los agentes mide su nivel de gastos. Por esta razón, la ecuación de acumulación de la economía es también la restricción presupuestal de los hogares. Las condiciones de optimalidad correspondientes son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = \frac{1}{c} - \lambda = 0, \quad (95)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = Tk - c = \dot{k}, \quad (96)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = -T\lambda = \dot{\lambda} - \lambda\rho, \quad (97)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k e^{-Tt} = 0. \quad (98)$$

Los niveles de consumo, de capital físico, de producto y tasa de crecimiento de equilibrio de la economía, bajo las condiciones establecidas se mantienen:

$$c = \rho k_0, \quad (99)$$

$$k = k_0, \quad (100)$$

$$y = T k_0, \quad (101)$$

$$\psi = T - \rho. \quad (102)$$

Debido a que el consumo y el capital crecen a la misma tasa, se tiene que las dinámicas correspondientes son:

$$\dot{c} = c(T - \rho), \quad (103)$$

$$\dot{k} = k(T - \rho). \quad (104)$$

Se mantiene el crecimiento balanceado y se concluye que los estados con coeficientes tecnológicos altos crecen a tasas mayores.

3.5.1. Impulso tecnológico gubernamental en la agroindustria

Suponga ahora que el gobierno interviene en el desarrollo de tecnología para impulsar la agroindustria, ya sea a través de programas de innovación que permitan elevar el nivel de eficiencia de las máquinas utilizadas en la recolección y selección de productos agrícolas o la renovación de tractores y vehículos de carga y transporte o bien un mejoramiento tecnológico en los procesos de siembra y cosecha. Cualquiera que sea la forma, esta intervención debe tener un impacto en la productividad del capital de manera positiva, lo que hace que las condiciones de producción de las unidades cambien, por lo que ahora se tiene:

$$\tilde{y} = T g_T k, \quad (105)$$

en donde $g_T > 1$ es el gasto que el gobierno ejercerá como inversión en la tecnología para fomentar un incremento en la productividad y $\tilde{y}$ es el nivel de producto bajo esta nueva condición. Como el impacto del gasto gubernamental sobre la productividad tiene un efecto positivo, entonces el nivel de producto será mayor debido a que se cumple que $Tg_T > T$, por lo que automáticamente se tiene que $\tilde{y} > y$. Estas modificaciones conducen a un nuevo problema de maximización:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } \mathcal{U} &= \int_0^{\infty} \ln c e^{-\rho t} dt \\ \text{s. a. } \dot{k} &= Tg_T k - c, \quad k_0 \text{ dado.} \end{aligned} \quad (106)$$

En este caso el nivel de ingresos de los hogares está dado por $Tg_T k$, mientras que los gastos de los mismos por c . Bajo esta visión de la economía, el concepto de riqueza del individuo depende sólo de la cantidad de capital físico que éste acumula. Las condiciones de optimalidad resultantes y los niveles de equilibrio son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = \frac{1}{c} - \lambda = 0, \quad (107)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = Tg_T k - c = \dot{k}, \quad (108)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = -Tg_T \lambda = \dot{\lambda} - \lambda \rho, \quad (109)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k e^{-(Tg_T - \rho)t} = 0, \quad (110)$$

$$c = \rho k_0, \quad (111)$$

$$k = k_0, \quad (112)$$

$$\tilde{y} = Tg_T k_0. \quad (113)$$

Con lo anterior se comprueba que $\tilde{y} > y$ debido a que se cumple $Tg_T k_0 > T k_0$, ya que $g_T > 1$. Sin embargo, ahora ambos sectores crecen a una tasa *per capita* (ψ) mayor, es decir:

$$\tilde{\psi} = Tg_T - \rho. \quad (114)$$

Para que se cumpla que $\tilde{\psi} > \psi$ se necesita que $g_T > 1$, ya que sólo de esta forma se cumple que $Tg_T k > Tk$. En otras palabras, si el gobierno invierte en el desarrollo tecnológico en un monto mayor al previamente existente al interior del sector agroindustrial, entonces éste puede influir en el crecimiento económico de manera positiva.

En seguida se evalúa el impacto que tiene la intervención gubernamental, el nivel tecnológico, el capital físico y las preferencias sobre el bienestar económico de las familias. El bienestar económico ($\mathcal{W}$) está dado por:

$$\mathcal{W} = \int_0^{\infty} \ln(\rho k_0 e^{(Tg_T - \rho)t}) e^{-\rho t} dt. \quad (115)$$

Al simplificar algebraicamente se llega a la expresión que mide el bienestar:

$$\mathcal{W} = \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\ln(\rho k_0) + \frac{Tg_T - \rho}{\rho} \right). \quad (116)$$

Como se puede apreciar el bienestar económico depende del nivel tecnológico existente en la economía (T), del impulso gubernamental para generar desarrollo tecnológico (g_T), de las preferencias de los individuos (ρ) y del capital inicial (k_0). Para establecer bajo qué condiciones se puede elevar el nivel de bienestar económico de los hogares, se realizará el siguiente análisis de estática comparativa. Si se deriva la función de bienestar con respecto al gasto en desarrollo tecnológico, g_T , se obtiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g_T} = \frac{T}{\rho^2} > 0. \quad (117)$$

La expresión anterior nos dice que si se incrementa el gasto de gobierno para generar un impulso tecnológico en el sector agrícola, entonces el bienestar económico aumentará. Lo anterior se debe a que la derivada es positiva. Por lo tanto, una intervención gubernamental en el desarrollo tecnológico que incremente la productividad del capital físico no sólo genera un mayor crecimiento económico, sino también incrementa el

nivel de bienestar de los hogares. Por otro lado, al derivar la función del bienestar respecto al nivel tecnológico existente en la economía se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial T} = \frac{g_T}{\rho^2} > 0. \quad (118)$$

En consecuencia, se deduce que los estados de la Cuenca con un mayor desarrollo tecnológico alcanzan niveles de bienestar mayores que los estados con niveles tecnológicos inferiores, por lo que, un aumento en la tecnología a través del impulso gubernamental incrementará el bienestar. Análogamente al derivar la función del bienestar respecto al capital físico inicial se encuentra:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial k_0} = \frac{1}{\rho k_0} > 0. \quad (119)$$

Lo anterior indica que un aumento en el capital inicial incrementará el bienestar, es decir, si la economía tiene en sus condiciones iniciales de producción un nivel más alto de capital, ya sea por cantidad o por calidad, el bienestar será todavía mayor. Finalmente, cuando se deriva la función bienestar con respecto a las preferencias de los individuos ρ , se obtiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \rho} = -\frac{2}{\rho^3} < 0. \quad (120)$$

Esto implica que si los individuos están dispuestos a sacrificar su consumo futuro por un mayor consumo en el presente, es decir, si los individuos tienen una mayor tasa subjetiva de descuento, entonces el bienestar se deteriora. En conclusión, incrementos en el gasto de gobierno que generen desarrollo tecnológico, en el capital inicial y en el nivel de tecnología existente, tendrán como resultado aumentos en los niveles de bienestar de los individuos. En contraparte, aumentos en la tasa subjetiva de descuento disminuirán el bienestar económico de los agentes.

3.5.2. Impulso tecnológico gubernamental y dinero como medio de financiamiento

Una vez que se ha incorporado al análisis el papel del gasto de gobierno, como un impulso generador de desarrollo tecnológico, se introduce de manera adicional el dinero a la economía. Para ello, suponga que los individuos desean mantener un monto de saldos reales, de tal forma que les permita financiar sus decisiones de consumo a lo largo de su vida. Suponga que $d = M/P$ son los saldos reales *per capita*, es decir, dinero y que la inflación, π es el costo por la tenencia de saldos reales, ya que al mantener dinero en el bolsillo se pierde poder de compra al aumentar el nivel general de precios. Por lo tanto, la restricción presupuestal del agente representativo se transforma en:

$$\dot{d} + \dot{k} = Tg_T k - c - \pi d, \quad (121)$$

Equivalentemente,

$$\dot{d} + \dot{k} = Tg_T d + Tg_T k - Tg_T d - c - \pi d. \quad (122)$$

El individuo sigue tomando decisiones de consumo, sin embargo, ahora desea acumular bienes de capital (k) y dinero (d). Siendo su nivel de riqueza total (R) la suma de la cantidad de bienes de capital físico y la cantidad de dinero que posee, se puede definir en consecuencia que la riqueza real del individuo es:

$$R = d + k, \quad (123)$$

Por lo tanto se obtiene la siguiente ecuación de acumulación:

$$\dot{R} = Tg_T R - (Tg_T + \pi)d - c, \quad (124)$$

Con la incorporación del dinero el nivel de ingresos de los hogares ahora está dado por la cantidad $Tg_T R = Tg_T d + Tg_T k$, mientras que el nivel de gastos es $c + (Tg_T + \pi)d$. Suponga que el individuo necesita mantener al menos una proporción α de dinero, que es equivalente a la cantidad del bien de consumo que desea consumir, es decir, $d = \alpha c$

(restricción *cash-in-advance*), esto es, dinero y bienes de consumo son sustitutos perfectos. Lo anterior implica que se requiere de una cierta cantidad mínima de saldos reales, en el bolsillo, para financiar el consumo. Por lo tanto, al sustituir la restricción *cash-in-advance*, se obtiene que la ecuación de acumulación de la riqueza dada por:

$$\dot{R} = Tg_T R - [(\alpha Tg_T + \alpha\pi) + 1]c. \quad (125)$$

En consecuencia, el nuevo problema de maximización está dado por (91) y (125), con las siguientes condiciones de optimalidad y niveles de equilibrio:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = \frac{1}{c} - \lambda(\alpha Tg_T + \alpha\pi + 1) = 0, \quad (126)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = Tg_T R - [(\alpha Tg_T + \alpha\pi) + 1]c = \dot{R}, \quad (127)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} = -\lambda(Tg_T) = \dot{\lambda} - \lambda\rho, \quad (128)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R e^{-(Tg_T)t} = 0, \quad (129)$$

$$c = \frac{\rho R_0}{\alpha(Tg_T + \pi) + 1}, \quad (130)$$

$$R = R_0, \quad (131)$$

$$\hat{y} = Tg_T R_0. \quad (132)$$

Se muestra que el nivel de producto de esta economía es mayor que en las dos anteriores, debido a que se cumple que $Tg_T R_0 > Tg_T k_0 > Tk_0$, es decir $\hat{y} > \bar{y} > y$. La tasa de crecimiento económico (ψ) bajo estas condiciones sigue siendo la misma que la de la economía descrita en el apartado anterior (véase ecuación (114)).

Para medir los impactos en el bienestar y elegir el nivel óptimo de gasto gubernamental y el nivel óptimo de tecnología, se determina el nivel de bienestar, es decir:

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty \ln \left(\frac{\rho R_0}{\alpha Tg_T + \alpha\pi + 1} e^{(Tg_T - \rho)t} \right) e^{-\rho t} dt. \quad (133)$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{W} = \ln\left(\frac{R_0}{\alpha T g_T + \alpha \pi + 1}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{T g_T - \rho}{\rho}\right). \quad (134)$$

Al derivar la ecuación del bienestar económico respecto a la proporción de saldos reales que el individuo desea mantener para financiar su consumo, se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \alpha} = -\frac{T g_T + \pi}{\alpha} < 0. \quad (135)$$

Por lo tanto, incrementos en la proporción de tenencia de saldos reales disminuye el bienestar económico porque el costo de los mismos (inflación) aumenta, lo que ocasiona una disminución del poder de compra de los hogares y, en consecuencia, una caída del nivel de consumo. Análogamente, la derivada del bienestar respecto a la inflación es:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \pi} = -\frac{\alpha}{\pi} < 0. \quad (136)$$

Obviamente, incrementos en el nivel general de precios disminuye el poder de compra de los individuos lo que se traduce en una caída en el consumo y, por lo tanto, en el bienestar económico. Por otro lado, si se deriva la función de bienestar respecto a la riqueza inicial, entonces se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial R_0} = \frac{1}{R_0} > 0. \quad (137)$$

Evidentemente, niveles de riqueza mayores ocasionan incrementos en el bienestar de las familias. De la misma manera, cuando se deriva respecto al nivel de tecnología existente se encuentra que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial T} = -\frac{\alpha g_T}{T} + \frac{g_T}{\rho^2} = 0. \quad (138)$$

En consecuencia, el nivel tecnológico óptimo que la economía debe tener es:

$$T = \alpha \rho^2. \quad (139)$$

El nivel tecnológico de la economía depende de las preferencias de los individuos y de la proporción de saldos reales utilizada para financiar el consumo. Por su parte, se puede determinar el nivel óptimo del gasto gubernamental como impulso generador de desarrollo tecnológico, para ello se deriva la función de bienestar con respecto a g_T y se iguala a cero, por lo que se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g_T} = -\frac{R_0 \alpha T}{g_T} + \frac{T}{\rho^2} = 0. \quad (140)$$

Al despejar g_T se encuentra el nivel óptimo del gasto de gobierno:

$$g_T = R_0 \alpha \rho^2. \quad (141)$$

Se puede apreciar que el nivel óptimo del gasto de gobierno impulsor del desarrollo tecnológico depende de la riqueza inicial de los individuos, R_0 , de la proporción de dinero que éstos utilizan para financiar su consumo, α y del parámetro de preferencias, ρ . Se concluye que el gobierno tiene la capacidad de incidir en el crecimiento económico a través de la generación de desarrollo tecnológico ya que conoce el nivel de la riqueza inicial de los individuos, la proporción de saldos reales que éstos mantienen y sus preferencias. Lo que significa que sabe exactamente cuál es el gasto óptimo de inversión en tecnología que permitirá tener una mayor tasa de crecimiento, siempre y cuando se cumpla con que $g_T > 1$, es decir, que $R_0 \alpha \rho^2 > 1$.

3.5.3. Impulso tecnológico gubernamental y dinero como reserva de valor

Por último, suponga ahora que el individuo obtiene satisfacción por la tenencia de los saldos reales (d), es decir, se tiene preferencia por la liquidez, y que dicho grado de satisfacción está medido por el parámetro (γ), véase Sidrausky (1967). Por lo tanto, el problema de maximización del individuo representativo es:

$$\text{Maximizar } \mathcal{U} = \int_0^{\infty} (\ln c + \gamma \ln d) e^{-\rho t} dt$$

$$s.a. \quad \dot{R} = Tg_T R - (Tg_T + \pi)d - c,$$

$$R_0 \text{ dado, } \gamma > 0. \quad (142)$$

De este planteamiento resultan las siguientes condiciones de optimalidad y niveles de equilibrio:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = \frac{1}{c} - \lambda = 0, \quad (143)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial d} = \frac{\gamma}{d} - \lambda(Tg_T + \pi) = 0, \quad (144)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = Tg_T R - (Tg_T + \pi)d - c = \dot{R}, \quad (145)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} = -\lambda(Tg_T) = \dot{\lambda} - \lambda\rho, \quad (146)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R e^{-(Tg_T)t} = 0. \quad (147)$$

$$c = \frac{\rho R_0}{\gamma + 1}, \quad (148)$$

$$d = \frac{\rho R_0 - 1}{Tg_T + \pi}, \quad (149)$$

$$R = R_0 \left(1 + \frac{\gamma + 2}{\gamma + 1} \right), \quad (150)$$

$$\bar{y} = Tg_T R_0 \left(1 + \frac{\gamma + 2}{\gamma + 1} \right). \quad (151)$$

Para garantizar que $d > 0$ es necesario suponer que $\rho R_0 > 1$. En esta economía el nivel producto es mayor que en las anteriormente descritas, es decir $\bar{y} > \hat{y} > \tilde{y} > y$, lo anterior se muestra a través de la siguiente desigualdad:

$$Tg_T R_0 \left(1 + \frac{\gamma + 2}{\gamma + 1} \right) > Tg_T R_0 > Tg_T k_0 > Tk_0, \quad (152)$$

La ecuación anterior muestra la introducción del gobierno, bajo las diversas hipótesis hasta ahora planteadas, en las actividades económicas a través de la generación tecnológica tiene efectos positivos sobre el producto y sobre la tasa de crecimiento, toda

vez que éstos son mayores que los correspondientes en ausencia del gobierno. En seguida se mide el impacto sobre el bienestar, el cual está dado por:

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty \ln\left(\frac{\rho R_0}{\gamma + 1} e^{(Tg_T - \rho)t}\right) + \gamma \ln\left(\frac{\rho R_0 - 1}{Tg_T + \pi} e^{(Tg_T - \rho)t}\right) e^{-\rho t} dt. \quad (153)$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{W} = \ln\left(\frac{R_0}{\gamma + 1}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{Tg_T - \rho}{\rho}\right) + \gamma \ln\left(\frac{\rho R_0 - 1}{(Tg_T + \pi)\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{Tg_T - \rho}{\rho}\right), \quad (154)$$

Para medir los impactos de cambios en el nivel de la riqueza sobre el bienestar económico se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial R_0} = \frac{1 + \gamma \rho}{R_0} > 0, \quad (155)$$

Claramente, la expresión anterior nos muestra que un incremento en el nivel de la riqueza de los individuos aumenta el bienestar económico de los hogares. Análogamente, impactos sobre el bienestar ocasionados por cambios en el nivel general de precios se pueden establecer a través de la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \pi} = -\frac{\gamma \rho}{\pi} < 0, \quad (156)$$

Por lo tanto, si el nivel general de precios aumenta entonces el bienestar económico de los individuos cae. Por otra parte, para encontrar el nivel óptimo tecnológico de la economía se deriva la ecuación que representa al bienestar respecto al nivel tecnológico, por lo que, se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial T} = 2 \frac{g_T}{\rho^2} - \frac{\gamma g_T \rho}{T} = 0, \quad (157)$$

En consecuencia, el nivel óptimo tecnológico es:

$$T = \frac{\gamma \rho^2}{2}, \quad (158)$$

Como se puede apreciar el nivel tecnológico óptimo depende de las preferencias y del nivel de satisfacción que proporciona la tenencia de saldos reales. Para obtener el gasto

óptimo del gobierno para generar desarrollo tecnológico, se deriva $\mathcal{W}$ con respecto de g_T y se obtiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g_T} = \frac{T}{\rho^2} - \frac{\gamma}{T g_T \rho} + \frac{T}{\rho^2} = 0, \quad (159)$$

El nivel óptimo de gasto gubernamental impulsor de tecnología, que es una cantidad positiva y que implica que aumentos en el nivel de gasto incrementa el bienestar económico es:

$$g_T = \frac{\gamma \rho}{2T^2}, \quad (160)$$

En conclusión, el nivel de gasto óptimo depende del parámetro de preferencias, del nivel de la tecnología y de la utilidad que le proporciona la tenencia de saldos reales al individuo, y genera beneficios reales a la economía.

Al resumir los resultados se tiene que en un modelo de crecimiento endógeno con un agente representativo que vive para siempre, en donde se introduce la participación del gobierno como impulsor tecnológico incrementando así la productividad del capital en una economía monetaria, se puede destacar que si el gobierno participa en la generación de tecnología, con el objetivo de incrementar la productividad del capital agroindustrial, entonces se genera un mayor crecimiento económico y de manera simultánea se eleva el nivel de bienestar económico de los hogares que dependen del nivel de actividad económica de dicho sector.

Adicionalmente, en cualquiera de las versiones que se utilizaron para incorporar el papel del dinero en la actividad económica, la tasa de crecimiento económico no depende de la tasa de expansión monetaria, por lo que se cumple con la neutralidad del dinero. La introducción del dinero, sin embargo, sí incrementa el nivel de producto y de riqueza de la economía, lo que ocasiona que el bienestar económico por este canal también se eleve.

Se mostró de manera clara que el crecimiento, el cual es balanceado, depende del gasto de gobierno destinado al impulso tecnológico agroindustrial, por lo que se concluye que el gobierno tiene fuertes incentivos para participar en la generación de tecnología, ya que con ello afecta a la productividad del capital de manera positiva en el sector agroindustrial. Al caracterizar el nivel óptimo de gasto gubernamental generador de un desarrollo tecnológico se establecen también las condiciones bajo las cuales el gobierno puede fomentar el crecimiento del sector agroindustrial e impulsar el bienestar de los hogares que participan dentro de las actividades económicas realizadas al interior de dicho sector.

Más aún, un mayor crecimiento no sólo se produce en el sector agroindustrial, sino que también se genera una dinámica de crecimiento mayor a nivel nacional. Como el gasto tecnológico óptimo gubernamental depende de variables económicas conocidas por el aparato público, se facilita la determinación de dicho gasto y su aplicación dentro de programas estatales que afecten, de la manera establecida en este apartado, a la actividad agroindustrial, véase Venegas-Martínez y Rivas-Aceves (2008). En principio, maquinaria y equipo de vanguardia tecnológica así como gasto en actualización de lo ya existente, son recomendaciones viables al respecto.

Ahora bien, el análisis se ha basado solamente en el efecto que tiene el gasto de gobierno sobre la tasa de crecimiento cuando el cambio tecnológico se da a través del capital físico, sin embargo, es necesario analizar si los resultados positivos encontrados se mantienen si el gobierno genera un cambio tecnológico por medio del capital humano de manera simultánea al generado a través del capital físico. A continuación se desarrolla el modelo correspondiente.

3.6. Gasto de gobierno, desarrollo tecnológico y habilidad laboral

En el marco de una economía cerrada con rendimientos constantes a escala y productos marginales decrecientes, estudia el efecto que tiene la participación del gobierno en el desarrollo tecnológico y en el incremento de la habilidad laboral por medio de un gasto gubernamental financiado por un impuesto sobre la renta. Bajo estructuras analíticas en términos reales y nominales, se caracteriza el equilibrio macroeconómico y se determina la tasa de crecimiento económico. Se mide el impacto sobre el bienestar económico que tienen los precios, el salario, la tasa de interés, los impuestos, el gasto aplicado al desarrollo tecnológico y el gasto destinado al incremento de la habilidad laboral.

La mayoría de los modelos de crecimiento endógeno están contruidos en términos reales porque permiten obtener resultados analíticos más claros en términos de las principales variables que determinan el crecimiento económico. Lo anterior, obviamente implica la omisión de posibles efectos, sobre el crecimiento, debido a modificaciones en variables nominales como el salario y los precios. Por lo tanto, la introducción del cambio tecnológico generado por el gobierno se realizará, en primer lugar, desde una estructura analítica en términos reales, para después revisar los efectos en una estructura en términos nominales, al igual que en Rivas-Aceves y Carranco Gallardo (2009).

3.6.1. Estructura analítica en términos reales

Una vez que ya se han planteado las bases sobre las cuales opera la economía (apartado 3.1), se introduce ahora la participación del gobierno de dos formas: la primera a través del fomento tecnológico y la segunda por medio del incremento de la habilidad laboral. Una vez más se omitirán los subíndices t para simplificar la notación matemática, lo que

no significa que las variables no dependen del tiempo. En cuanto al avance tecnológico suponga que el gobierno interviene en el desarrollo de tecnología, ya sea mediante apoyos al sector empresarial para realizar actividades de innovación y desarrollo, o por medio de investigación tecnológica realizada al interior del gobierno. En ambos casos la productividad del capital se ve modificada, de tal manera que la función de producción, en una primera parte, toma la siguiente forma:

$$f(k) = Ag_a k, \quad (161)$$

en donde $g_a > 0$ es el gasto que el gobierno realiza bajo las formas antes mencionadas para la generación del avance tecnológico. Por ende, significa que una parte del producto tiene como insumo el nivel tecnológico existente hasta ese momento en la economía. Por otro lado, suponga ahora que los individuos deciden participar en el proceso de producción proporcionando su mano de obra, y que del total de tiempo naturalmente disponible por un ser humano en un día (T), se puede destinar tiempo para el ocio (l) y tiempo para el trabajo (η). Quiere decir entonces que se cumple con lo siguiente:

$$T = l + \eta, \quad (162)$$

nótese que $T = 1$ ya que sólo se pueden trabajar como máximo 24 horas al día. Además, suponga que sólo se puede destinar al proceso productivo mano de obra que sea capacitada por el gobierno, esta capacitación se da en el sentido de que incrementa la habilidad para el manejo de las nuevas tecnologías que ya han sido generadas por la intervención del gobierno en el avance tecnológico. En otras palabras, es necesario capacitar a la mano de obra para el uso de la tecnología, cada vez que ésta es desarrollada. En consecuencia el proceso productivo, una vez que se incorporan el nivel tecnológico y la habilidad laboral, está determinado finalmente por la siguiente función de producción:

$$f(k, \eta) = Ag_a k + \eta g_h k, \quad (163)$$

en donde $g_h > 0$ es el gasto que el gobierno ejerce para lograr un incremento en la habilidad laboral. Lo que está detrás de este supuesto es que el producto es resultado sólo de la producción a través de dos tipos de capital, uno que no necesita del manejo de los trabajadores y otro que sí. Por otro lado, el gobierno obtiene los recursos que utiliza para la generación del desarrollo tecnológico y para el incremento en la habilidad laboral, a través de un impuesto sobre la renta (τ) que aplica al sector empresarial. Por lo tanto, la restricción del gobierno se define de la forma siguiente:

$$\tau y = g_a + g_h \quad (164)$$

En este punto también se puede deducir que, el gasto total que puede realizar el gobierno está determinado por la cantidad de recursos que destina a la generación de nuevas tecnologías, ya sea como apoyo a la empresa o como actividades de investigación, más la cantidad de recursos que destina para la capacitación de la mano de obra en el manejo de las mismas. El impuesto sobre la renta ocasiona que ahora el nivel de producto (y) de la economía esté dado por:

$$y = (Ag_a k + \eta g_h k)(1 - \tau). \quad (165)$$

El análisis de la economía, hasta ahora, es en términos reales ya que se supone que el precio del bien de consumo y el salario son constantes, y cumplen con $p = w = 1$. Podemos ahora definir la restricción presupuestal del consumidor, la cual está determinada por la ecuación:

$$k_0 = \int_0^\infty c e^{-[(Ag_a + \eta g_c)(1-\tau)]t} dt + \int_0^\infty \eta e^{-[(Ag_a + \eta g_c)(1-\tau)]t} dt. \quad (166)$$

Como el individuo ahora puede obtener satisfacción por el consumo y por el ocio, entonces la función de utilidad resultante es:

$$u(c) = \alpha \ln c + (1 - \alpha) \ln l, \quad (167)$$

en donde $\alpha > 0$ mide la proporción de utilidad que genera el consumo y el ocio. En consecuencia, el problema de optimización que resulta de la introducción del gobierno en las actividades económicas está dado por (166) y (167), y sus condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\alpha}{c} = \lambda, \quad (168)$$

$$\frac{(1 - \alpha)}{l} = -\lambda, \quad (169)$$

$$\dot{k} = (Ag_a k + \eta g_h k)(1 - \tau) - \eta - c, \quad (170)$$

$$(Ag_a k + \eta g_h k)(1 - \tau)\lambda = -\dot{\lambda} + \delta\lambda, \quad (171)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k e^{-(Ag_a + \eta g_h)(1 - \tau)t} = 0. \quad (172)$$

Las condiciones iniciales resultantes al tiempo $t = 0$ para el consumo, ocio, capital y producto de la economía están representadas por:

$$\hat{c}_0 = \alpha \delta k_0 - 1, \quad k_0 > \frac{1}{\alpha \delta}, \quad (173)$$

$$\hat{l}_0 = (\alpha - 1)\delta k_0 - 1, \quad \delta k_0 > \frac{1}{\alpha - 1}, \quad (174)$$

$$\hat{k}_0 = k_0, \quad (175)$$

$$\hat{y}_0 = (Ag_a + \eta g_h)(k_0)(1 - \tau), \quad (176)$$

en donde $\hat{\cdot}$ denota las nuevas cantidades en esta economía y k_0 una vez más es el capital inicial. Se aprecia que el nivel de consumo depende de las preferencias de los individuos, del capital inicial y de la proporción de utilidad que generan al individuo, por lo que aumentos en cualquiera de ellos, incrementa el nivel de consumo de los individuos. Análogamente, el nivel de ocio depende de manera inversa de los mismos parámetros, así que incrementos en sus determinantes disminuyen el ocio. Por su parte, el nivel de capital sólo está determinado por el capital inicial de la economía. Finalmente, el producto depende del nivel tecnológico existente en la economía, del

gasto que el gobierno realice en desarrollo tecnológico y habilidad laboral, del nivel de trabajo utilizado en el proceso productivo, del capital inicial y del impuesto sobre la renta. Significa que, a mayor avance tecnológico y a mayor habilidad laboral el producto crece. Bajo estos argumentos, la nueva tasa de crecimiento económico balanceado (ψ) de la economía es:

$$\psi = [(Ag_a + \eta g_h)(1 - \tau)] - \delta. \quad (177)$$

Para que el crecimiento sea positivo es necesario que $\tau < \delta$, y además que se cumpla con cualquiera de las siguientes condiciones; que $(g_a + g_h) > \delta$, $(A + \eta) > \delta$, o bien que $(Ag_a + \eta g_h) > \delta$. En caso contrario el crecimiento económico será negativo. Por otro lado, debido a la participación del gobierno en el desarrollo tecnológico y en el incremento de la habilidad laboral, los niveles de producto y consumo en esta economía son mayores a los mostrados en el apartado anterior en donde la participación del gobierno era nula, es decir, $\hat{y} > y$ y $\hat{c} > c$. Lo anterior se cumple si y sólo si se verifican las condiciones arriba mencionadas, por lo tanto las desigualdades correspondientes que a continuación se muestran son válidas:

$$[(Ag_a + \eta g_h)(k_o)(1 - \tau)] > Ak_o, \quad (178)$$

$$(\alpha \delta k_o - 1) > k_o \delta. \quad (179)$$

De igual forma, se puede observar que la tasa de crecimiento económico es mayor con la participación del gobierno en el avance tecnológico y en el incremento de la habilidad laboral, ya que $\psi > \varphi$. En consecuencia, el impacto que tiene la participación del gobierno en las actividades tecnológicas y laborales ya mencionadas es positivo, debido a que incrementa el coeficiente tecnológico de la economía que a su vez genera un mayor crecimiento.

Para poder evaluar el impacto sobre el bienestar debido a modificaciones en las variables económicas aquí propuestas, es necesario obtener la función del bienestar

económico o de utilidad indirecta ($\mathcal{W}$) que resulta de la sustitución del nivel óptimo de consumo y de ocio en (167), por lo que se tiene:

$$\mathcal{W} = \int_0^{\infty} \alpha \ln(\alpha \delta k_0 - 1) + (1 - \alpha) \ln[(\alpha - 1)\delta k_0 - 1] + 2[(Ag_a + \eta g_h)(1 - \tau) - \delta]te^{-\delta t} dt. \quad (180)$$

Para analizar el bienestar económico en términos de un gasto inicial se realiza una expansión en serie de Taylor de ambos tipos de gasto de gobierno alrededor del cero, por lo que:

$$g_t^a = g_0^a + g_0^{'a}z + o(z), \quad (181)$$

$$g_t^h = g_0^h + g_0^{'h}z + o(z), \quad (182)$$

en donde $z < t$ y $o(z)$ es un término de error, en consecuencia se tiene:

$$\mathcal{W} = \alpha \ln\left(\frac{\alpha \delta k_0 - 1}{\delta}\right) + (1 - \alpha) \ln\left(\frac{(\alpha - 1)\delta k_0 - 1}{\delta}\right) + 2\left[\frac{(Ag_0^a + \eta g_0^h)(1 - \tau) - \delta}{\delta^2}\right] + O(z), \quad (183)$$

en donde $O(z)$ contempla las pendientes $g_0^{'a}(0)z$ y $g_0^{'h}(0)z$. Como se aprecia, el bienestar económico depende de las preferencias del individuo δ , del capital inicial k_0 , del nivel tecnológico de la economía A , de la cantidad de trabajo hábil utilizado, del gasto gubernamental en desarrollo tecnológico e incremento de la habilidad laboral g_a y g_h , de la proporción de utilidad α , del consumo y el ocio, y finalmente de los impuestos τ . Mediante el siguiente análisis de estática comparativa se mostrará bajo qué condiciones el bienestar económico mejora o empeora. Un aumento en los niveles de gasto de gobierno en desarrollo tecnológico y mejora de la habilidad laboral, en la cantidad de trabajo hábil y en el nivel tecnológico de la economía, incrementa el bienestar económico de los hogares. Lo anterior se cumple porque:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g_0^a} = 2 \frac{A(1-\tau)}{\delta^2} > 0, \quad (184)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g_0^h} = 2 \frac{\eta(1-\tau)}{\delta^2} > 0, \quad (185)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial A} = 2 \frac{g_a(1-\tau)}{\delta^2} > 0, \quad (186)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \eta} = 2 \frac{g_h(1-\tau)}{\delta^2} > 0. \quad (187)$$

Por su parte, cualquier cambio en la cantidad de capital inicial utilizado en el proceso de producción no afecta al bienestar económico, ya que para cualquier valor de la proporción de utilidad α , recordando que $0 < \alpha < 1$, se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial k_0} = \frac{1}{k_0} \left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha-1} \right) = 0. \quad (188)$$

Con ello se verifica la hipótesis de Solow (1957) respecto a que modificaciones en la función de producción que dejen intacta la tasa marginal de sustitución, son consideradas como cambios técnicos neutrales. En este sentido, aumentos en la cantidad de capital inicial utilizado incrementa el stock de capital, pero mantiene constante el flujo máximo de servicios del capital, suponiendo que todas las máquinas tienen la misma capacidad anual. La razón está en que la función de producción mide el capital en uso y no el capital en cantidad. Por el otro lado, aumentos en el nivel de impuestos y en el deseo presente por el consumo que se refleja en la tasa subjetiva de descuento, generan una disminución del bienestar económico de los hogares, ya que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tau} = -2 \frac{Ag_a + \eta g_h}{\delta^2} < 0, \quad (189)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \delta} = -2 \left(\frac{1+2\delta}{\delta^2} \right) - \frac{1}{\delta} + \frac{1-\alpha}{(\alpha-1)\delta k_0} + \frac{1}{\delta k_0} < 0. \quad (190)$$

Si se toma en cuenta una vez más que $0 < \alpha < 1$, entonces el tercer miembro del lado derecho de la igualdad es negativo por lo que la ecuación (190) es menor que cero. Por lo tanto, una política económica orientada a la generación del avance tecnológico y al

incremento de la habilidad laboral además de promover el crecimiento económico, conduce a un mejoramiento en la calidad de vida de los individuos. Esto tiene que ir acompañado por un manejo eficiente de los recursos obtenidos por el gobierno a través de los impuestos, ya que aumentos en el nivel de impuestos tienen efectos negativos sobre el crecimiento y el bienestar económico.

3.6.2. Estructura analítica en términos nominales

Hasta ahora se había supuesto que los precios y el nivel de salarios son constantes e iguales a la unidad, con la finalidad de mostrar las relaciones existentes en términos reales entre las variables propuestas. Sin embargo, en esta parte se levantará dicho supuesto para evaluar los efectos que tienen los precios y los salarios en la economía ya descrita. Ahora también se puede conocer el nivel del salario (w) y de la tasa de interés (r) de equilibrio, los cuales equivalen a la productividad marginal de los factores de producción, por lo tanto:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = (Ag_a + \eta g_h)(1 - \tau) = r, \quad (191)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = g_h k(1 - \tau) = w, \quad (192)$$

Nótese que, el nivel de salario de equilibrio ahora es mayor que el correspondiente al del modelo base porque el gasto de gobierno, destinado al incremento de la habilidad laboral, modifica la productividad del trabajo de manera positiva. La habilidad en el manejo de nueva tecnología que proporciona el sector laboral es retribuida por dicho salario, de tal suerte que el productor representativo se enfrenta a un costo salarial ($w\eta$). Al incorporar los precios y el salario, junto con la relación encontrada en (191) a (166),

el consumidor representativo dueño de la empresa tiene como nueva restricción presupuestal la siguiente:

$$k_0 = \int_0^{\infty} p c e^{-rt} dt + \int_0^{\infty} w \eta e^{-rt} dt, \quad (193)$$

en donde p es el precio del bien de consumo. Como se mantiene la misma función de utilidad en términos del consumo y el ocio, entonces el problema de optimización está ahora dado por (167) y (193), con las siguientes condiciones de optimalidad:

$$\frac{\alpha}{pc} = \lambda, \quad (194)$$

$$\frac{(1-\alpha)}{wl} = -\lambda, \quad (195)$$

$$\dot{k} = rk - w\eta - pc, \quad (196)$$

$$r\lambda = -\dot{\lambda} + \delta\lambda, \quad (197)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k e^{-rt} = 0. \quad (198)$$

Las nuevas condiciones iniciales al tiempo $t=0$ de esta economía compuesta por el consumo, el ocio, el capital y el producto, de manera conjunta con (192) y con la tasa de crecimiento, son:

$$\bar{c}_0 = \frac{\alpha[\delta k_0 - g_h k_0(1-\tau)]}{p}, \quad \delta k_0 > g_h k_0(1-\tau), \quad (199)$$

$$\bar{l}_0 = \frac{(\alpha-1)[\delta k_0 - g_h k_0(1-\tau)]}{g_h k_0(1-\tau)}, \quad \alpha > \delta k_0 > g_h k_0(1-\tau), \quad (200)$$

$$\bar{k}_0 = k_0, \quad (201)$$

$$\bar{y}_0 = [(Ag_a + \eta g_h)(1-\tau)k_0], \quad (202)$$

$$\psi = [(Ag_a + \eta g_h)(1-\tau)] - \delta. \quad (203)$$

Inmediatamente se puede observar que la tasa de crecimiento de la economía en términos nominales es la misma que la de la economía en términos reales. También se aprecia que el consumo depende de manera positiva de la tasa subjetiva de descuento y

del capital inicial, pero ahora mantiene una relación inversa con los precios, por lo que aumentos en el precio del bien disminuyen su consumo. Análogamente, existe una relación inversa entre el ocio, los precios y el salario en términos de la ecuación (192), de tal forma que aumentos en el nivel de gasto de gobierno para incrementar la habilidad laboral originan una caída en el ocio. La disminución del ocio necesariamente implica un aumento en la cantidad de horas trabajadas debido a la relación definida en (162), y dado que la tasa de crecimiento expresada en (177) se mantiene para esta estructura analítica en términos nominales, en consecuencia el aumento en la cantidad de trabajo ocasiona que la tasa de crecimiento sea mayor. Por lo tanto, el aumento en el salario a través de g_h afecta de manera indirecta a la tasa de crecimiento en sentido positivo, dicho efecto no se presenta cuando el análisis se hace en términos reales. El aumento en el capital inicial tiene el mismo efecto, ya que se cumple con $\delta k_0 > g_h k_0(1 - \tau)$. Por el lado del producto se tiene que $\bar{y} > y$, ya que se cumple la siguiente desigualdad:

$$[(Ag_a + \eta g_h)(1 - \tau)k_0] > Ak_0. \quad (204)$$

La incorporación de los precios y el salario al análisis, de manera conjunta con la introducción del papel del gobierno como agente promotor del crecimiento a través del desarrollo tecnológico y el incremento de la habilidad laboral, muestra que los niveles de consumo, producto y crecimiento son mayores que los mostrados en ausencia de los mismos. Más aún, incrementos en el salario tienen efectos positivos sobre el crecimiento toda vez que provocan aumentos en la cantidad de trabajo. Por lo tanto, un aumento en g_h tiene un efecto positivo de manera directa sobre el crecimiento y uno de manera indirecta vía los salarios. Esta relación no aparece cuando el análisis se hace en términos reales.

Una vez más encontramos la función de utilidad indirecta mediante la sustitución de los niveles óptimos de consumo y ocio, para poder medir el impacto sobre el bienestar económico, por lo que se tiene:

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty \alpha \ln \frac{\alpha(\delta k_0 - w)}{p} + (1 - \alpha) \ln \frac{(a - 1)(\delta k_0 - w)}{w} + 2(r - \delta)te^{-\delta t} dt. \quad (205)$$

Equivalentemente, al aplicar las condiciones dadas por (181) y (182), se tiene:

$$\mathcal{W} = \alpha \ln \frac{\alpha(\delta k_0 - w)}{\delta p} + (1 - \alpha) \ln \frac{(a - 1)(\delta k_0 - w)}{w\delta} + \frac{2(r - \delta)}{\delta^2}. \quad (206)$$

El bienestar económico de los hogares depende de las preferencias del individuo δ , del capital inicial k_0 , del salario w , de los precios p , de la proporción de utilidad α y de la tasa de interés $r = (Ag_a + \eta g_h)(1 - \tau)$. La ecuación del bienestar económico muestra que un aumento en la tasa de interés mejora el nivel de vida de los hogares, mientras que un incremento en los precios disminuye el mismo y finalmente que un alza en el salario nominal mejora el bienestar económico. Lo anterior se comprueba con el siguiente análisis de estática comparativa:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial r} = \frac{2}{\delta^2} > 0, \quad (207)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} = -\frac{1}{p^2} \left[\frac{1}{\delta[\delta k_0 - w]} \right] < 0, \quad (208)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} = \frac{1}{\delta k_0 - w} \left(1 + \frac{1 - \alpha}{\alpha - 1} - \frac{1 - \alpha}{w\delta} \right) > 0. \quad (209)$$

Por lo tanto, incrementos en el gasto de gobierno destinado al desarrollo tecnológico y al incremento en la habilidad laboral, que a su vez conducen a incrementos en la tasa de interés real y en los salarios, debido a las condiciones establecidas en (191) y (192), provocan de manera indirecta un aumento en la tasa de crecimiento económico, y al mismo tiempo mejora el bienestar de los hogares. Por su parte, incrementos en el nivel de precios de la economía empeora el bienestar económico, por lo tanto, procesos

inflacionarios son no deseables debido a que el bienestar de los hogares disminuye considerablemente. Finalmente, un aumento en el impuesto sobre la renta que conlleva una disminución en la tasa de interés, como lo muestra la ecuación (191), genera una caída del bienestar económico.

En conclusión, Con una estructura analítica en términos reales y otra en términos nominales, se desarrolló un modelo de crecimiento endógeno con agentes que tienen vida infinita, rendimientos constantes a escala y con la economía cerrada. En donde la participación del gobierno en las actividades económicas a través de la generación del avance tecnológico y el incremento de la habilidad laboral, por medio de un gasto gubernamental financiado con impuestos sobre la renta, generan un mayor crecimiento económico. Bajo ambas estructuras el nivel de consumo, capital y producto es mayor cuando el gobierno interviene en dichas actividades que en ausencia del mismo. El impacto que tienen aumentos en el nivel de gasto, destinados al desarrollo tecnológico y al incremento de la habilidad laboral, sobre el bienestar económico de los hogares y sobre la tasa de crecimiento económico es positivo. Al aumentar los niveles de gasto antes mencionados, aumenta la tasa de interés real, ya que esta última depende de manera directa de ambos tipos de gasto, lo que tiene una vez más un impacto positivo sobre el crecimiento. Por su parte, incrementos en el nivel de impuestos provocan disminuciones en la calidad de vida de los agentes y una caída de la tasa de crecimiento. Razón por la cual, una asignación eficiente de los recursos destinados al desarrollo tecnológico y al incremento de la habilidad laboral por parte del gobierno es deseable, ya que con ello se evitarán incrementos en el nivel de impuestos que generen efectos negativos.

En particular, cuando la estructura analítica está en términos nominales, un incremento en los salarios, provocado por un aumento en el gasto de gobierno destinado

a la habilidad laboral, ocasiona un incremento en el trabajo que desemboca en un alza de la tasa de crecimiento económico. Al mismo tiempo tiene un efecto positivo sobre el bienestar económico, por lo que un aumento en dicho gasto es recomendable porque fomenta el crecimiento de manera indirecta vía los salarios. Como el nivel de salario depende del gasto de gobierno destinado al incremento de la habilidad laboral, entonces un aumento en el mismo tiene efectos positivos sobre el bienestar de los hogares ya que aumentos en el salario ocasionan el mismo resultado en el bienestar. En el caso contrario, caídas en el salario ocasionan una caída muy fuerte en el bienestar económico de los hogares.

Por otra parte, los resultados de la teoría respecto a modificaciones en los precios se mantienen bajo las hipótesis establecidas en esta investigación respecto a la incorporación del gobierno como generador del cambio tecnológico. Es decir, aumentos en los precios tienen un efecto negativo sobre el consumo y, por ende, sobre el bienestar. Finalmente, los impactos del aumento en la tasa de interés sobre la tasa de crecimiento y el bienestar son positivos.

Para ampliar el análisis realizado hasta ahora, a continuación se desarrolla un modelo en donde se introducen más argumentos en la función de utilidad y se modifican los supuestos relacionados con la fuerza de trabajo.

3.7. Gobierno como promotor del cambio tecnológico: un modelo de crecimiento endógeno con trabajo, dinero y deuda

Considere una economía poblada por consumidores idénticos con vida infinita que maximizan su satisfacción por un bien de consumo y por la tenencia de saldos monetarios reales. En este contexto, los saldos reales producen satisfacción en los individuos por sus servicios de liquidez. De esta manera, la función de utilidad tiene dos

argumentos: un bien genérico de consumo de carácter perecedero y dinero en términos de los bienes que el individuo puede comprar (poder adquisitivo). Asimismo, se supone que dichos agentes adquieren desutilidad por el trabajo y por sus pasivos (deuda). En la economía se produce y consume un único bien, y se tiene acceso al mercado internacional de deuda en donde el público puede adquirir bonos internacionalmente comerciables. Por simplicidad se normaliza a la unidad el número de consumidores al tiempo $t = 0$ y se supone que el tamaño de población, en cualquier tiempo $t > 0$, está dado por $N(t) = e^{\mu t}$, con una tasa de crecimiento de la población, μ , considerada exógena y constante. Cada consumidor aporta η horas de trabajo (por determinar endógenamente), por lo que el total del insumo trabajo, en cada instante, disponible en la economía está dado por:

$$L(t) = \eta N(t) = \eta e^{\mu t}. \quad (210)$$

Al mismo tiempo, cada individuo tiene deuda, d , y dos activos reales: capital, k , y saldos monetarios reales, m . Se supone que los consumidores tienen previsión perfecta, es decir, conocen perfectamente la tasa de inflación en cada instante y, en consecuencia, se tiene que:

$$\left(\frac{dP}{P}\right)\left(\frac{1}{dt}\right) = \pi^e = \pi > 0, \quad (211)$$

en donde P es el nivel general de precios, π es la tasa de inflación, π^e es la tasa de inflación esperada y $P(0)$ es tomado como dado.

Los hogares están compuestos por consumidores idénticos que obtienen satisfacción por el consumo y por la tenencia de dinero, así como desutilidad por el trabajo y por sus pasivos. En consecuencia, el dinero entra como argumento de la función de utilidad al estilo Patinkin (1956) y Sidrauski (1967), mientras que la deuda se analiza como en Bardhan (1967) e Intriligator (1971). El consumidor representativo

desea maximizar en el presente, es decir, al tiempo $t = 0$, su utilidad total descontada dada por:

$$U = \int_0^{\infty} u(c, m, \eta, d) e^{-(\rho-\mu)t} dt, \quad (212)$$

donde c es el consumo *per capita* y ρ es la tasa subjetiva de descuento. Para simplificar el análisis y obtener soluciones analíticas sencillas de examinar, se supondrá que $\rho > \mu$ lo cual implica que el consumidor está ansioso por el consumo presente. El análisis subsiguiente se llevará a cabo con el siguiente índice de satisfacción:

$$u(c, m, \eta, d) = \frac{(c^\alpha m^{1-\alpha})^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{(\eta^\beta d^{1-\beta})^{1+\phi}}{1+\phi}, \quad (213)$$

en donde α y β son parámetros de preferencias sobre el consumo, dinero, trabajo y deuda y satisfacen que $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. Por otro lado, γ y ϕ son parámetros que miden la elasticidad intertemporal de sustitución, con $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$ y $\phi > 1$. Las condiciones antes mencionadas son necesarias para asegurar que la función de utilidad propuesta sea cóncava en todos sus argumentos. Por lo tanto, se cumple las siguientes relaciones:

$$u_c, u_m, -u_\eta, -u_d > 0, \quad (214)$$

$$u_{cc}, u_{mm}, u_{\eta\eta}, u_{dd} < 0, \quad (215)$$

$$-u_{cc} \frac{c}{u_c} - u_{mm} \frac{m}{u_m} = 1 + \gamma, \quad (216)$$

$$u_{\eta\eta} \frac{\eta}{u_\eta} - u_{dd} \frac{d}{u_d} = \phi - 1 > 0, \quad (217)$$

$$u_c(0, m, \eta, d) = u_m(c, 0, \eta, d) = \infty, \quad (218)$$

$$u_\eta(c, m, 0, d) = u_d(c, m, \eta, 0) = 0, \quad (219)$$

$$u_c(\infty, m, \eta, d) = u_m(c, \infty, \eta, d) = 0, \quad (220)$$

$$u_\eta(c, m, \infty, d) = u_d(c, m, \eta, \infty) = -\infty. \quad (221)$$

De las condiciones arriba establecidas, se tiene que las elasticidades marginales del consumo (ξ_c), saldos reales (ξ_m), trabajo (ξ_η) y deuda (ξ_d), respectivamente, son:

$$\xi_c = 1 - \alpha + \alpha\gamma, \quad (222)$$

$$\xi_m = \alpha + \gamma - \alpha\gamma, \quad (223)$$

$$\xi_\eta = \beta\phi + \beta - 1, \quad (224)$$

$$\xi_d = \phi - \phi\beta - \beta, \quad (225)$$

Por otro lado, la restricción presupuestaria del consumidor representativo está dada por:

$$\dot{k} + \dot{m} - \dot{d} = (1 - \tau_r)rk + (1 - \tau_w)w\eta + \mu d - (\pi + \mu)m - rd - (1 + \tau_c)c - \mu k, \quad (226)$$

en donde w es el salario, r es la tasa de interés (real) que los individuos toman como dada, πm representa la depreciación por inflación de los saldos reales, τ_w es un impuesto al ingreso salarial, τ_r es el impuesto sobre los ingresos del capital y τ_c es la tasa impositiva (al valor agregado) sobre el consumo. Si los valores iniciales $k(0)$, $m(0)$, y $d(0)$ se suponen conocidos y se denota $a = k + m - d$ como la riqueza (neta de deuda), por unidad de tiempo, del individuo, entonces la restricción presupuestal se puede reescribir como:

$$a_0 = \int_0^\infty [(1 - \tau_w)w\eta + \tau_r rd + (1 + \tau_c)c + (i - \tau_r r)m] e^{-[(1 - \tau_r)r - \mu]t} dt, \quad (227)$$

donde $i = r + \pi$ es la tasa de interés nominal. Observe que el individuo no es retribuido con transferencias de suma fija, ya que el gasto del gobierno se empleará exclusivamente para impulsar el desarrollo tecnológico en las empresas. En consecuencia, el problema de optimización resultante del individuo representativo está dado por (212) y (227). En este caso, las condiciones (necesarias) de primer orden para una solución interior son:

$$\alpha c^{\alpha(1-\gamma)-1} m^{(1-\gamma)(1-\alpha)} = \lambda(1 - \tau_c), \quad (228)$$

$$(1 - \alpha)c^{\alpha(1-\gamma)} m^{-\gamma(1-\alpha)-\alpha} = \lambda(i - \tau_r r), \quad (229)$$

$$-\beta \eta^{\beta(1+\phi)-1} d^{(1+\phi)(1-\beta)} = -\lambda(1 - \tau_w)w, \quad (230)$$

$$-(1 - \beta)\eta^{\beta(1+\phi)} d^{-\beta(1+\phi)+\phi} = \lambda \tau_r r, \quad (231)$$

$$[(1 - \tau_r)r - \mu]\lambda = -\dot{\lambda} + (\rho - \mu)\lambda, \quad (232)$$

$$\dot{a} = [(1 - \tau_r)r - \mu]a + (1 - \tau_w)w\eta - \tau_r r d - (1 + \tau_c)c - (i - \tau_r r)m, \quad (233)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a e^{-[(1-\tau_r)r-\mu]t} = 0. \quad (234)$$

De lo anterior se obtienen las relaciones de sustitución entre consumo y saldos reales, entre trabajo y deuda, y las tasas de crecimiento, ψ , correspondientes:

$$\frac{c}{m} = \frac{i - \tau_r r}{1 - \tau_c} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right), \quad (235)$$

$$\frac{\eta}{d} = \frac{\tau_r r}{(1 - \tau_w)w} \left(\frac{\beta}{1 - \beta} \right), \quad (236)$$

$$\psi_c = \psi_m = \frac{[(1 - \tau_r)r - \rho]}{\gamma}, \quad (237)$$

$$\psi_\eta = \psi_d = \frac{[(1 - \tau_r)r - \rho]}{\phi}. \quad (238)$$

La ecuación (235) nos muestra que un aumento en la tasa de interés nominal eleva el costo de la tenencia de saldos reales por lo que ésta disminuye y aumenta el consumo, mientras que un aumento en las tasas impositivas disminuye el consumo. En donde la remuneración a la productividad marginal del capital, r , cumple con $r = A - \rho$. Por otro lado, en la ecuación (236), se tiene que un aumento en el nivel salarial incrementa las horas de trabajo, mientras que un aumento en la tasa de interés real eleva el nivel de deuda. Finalmente, las tasas de crecimiento del consumo, dinero, trabajo y deuda dependen directamente de la tasa de interés real e indirectamente de su correspondiente

parámetro de elasticidad intertemporal. Dicho crecimiento se verificará siempre que $(1 - \tau_r)r > \rho$ para todos los sectores.

Suponga ahora que el gobierno interviene como impulsor del desarrollo de tecnología, ya sea a través de la generación directa de nueva tecnología para las empresas, o bien por medio de programas de innovación que permiten elevar el nivel de eficiencia de la productividad del capital existente. En consecuencia, las condiciones de producción de la economía toman la forma:

$$y = f(k; g) = Agk, \quad (239)$$

en donde $g > 1$ es el gasto *per capita* que el gobierno ejercerá como impulsor de la tecnología para fomentar un incremento en la productividad del capital, A , y $f(k; g)$ es el nivel de producto bajo esta nueva condición. Para que el impacto del gasto gubernamental sobre el nivel tecnológico sea positivo, es necesario que g sea mayor a la unidad ya que sólo así se cumple que $Ag > A$. Se supone que el gasto de gobierno no está sujeto a congestión, sin embargo no significa que no sea pertinente un análisis posterior al respecto. Por otro lado, el gobierno recauda los impuestos por concepto de consumo privado, ingresos por el capital e ingresos salariales, y como el gobierno no consume ni genera utilidad para los consumidores, entonces la restricción presupuestal del gobierno consolidada en términos *per capita* es:

$$g = \tau_r rk + \mu b + b + \tau_c c + m\sigma_m - rb, \quad (240)$$

en donde $\sigma_m = (dM/M)(1/dt)$ es la tasa de expansión monetaria en términos reales, b es la deuda pública con $b(0)$ dada y con tasa de crecimiento exógena. Este último supuesto no describe por completo el comportamiento del gobierno respecto del manejo de la deuda pública. Sin embargo, la razón de utilizar este marco simplificado es evitar dinámicas complejas de transición, la cual nos desviaría de los objetivos originalmente planteados en nuestro experimento de cambio tecnológico. Por otro lado, para evitar que

el gobierno pueda instrumentar una política monetaria activa, suponga que σ_m se determina de manera endógena y que cumple:

$$\sigma_m = \sigma_M - \pi, \quad (241)$$

en donde σ_M es la tasa de expansión monetaria en términos nominales. Por último, se excluye la posibilidad de generar pirámides (juegos Ponzi) para el financiamiento del gobierno, por lo que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b e^{-(r-\mu)t} = 0. \quad (242)$$

Por su parte, el sector empresarial, que tiene como objetivo maximizar el valor presente de su flujo neto de efectivo, produce bienes a través de la tecnología $y = Agk$, y remunera a los factores de la producción capital y trabajo. Por lo tanto, la empresa representativa maximizara sus beneficios dados por:

$$y = Agk - (r + \delta)k - w\eta, \quad (243)$$

en donde δ es la tasa de depreciación de capital, la cual se supone constante. En el equilibrio, la productividad marginal de los factores de la producción es igual a su correspondiente remuneración, por lo tanto:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = Ag - \delta = r, \quad (244)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = -w = w, \quad \text{lo que implica } w = 0. \quad (245)$$

En este caso, se puede pensar como en Barro y Sala-i-Martin (1995, cap. 4) que cada individuo ofrece de manera inelástica una unidad de trabajo por unidad de tiempo a cambio de $w = 0$.

En el equilibrio de previsión perfecta, con consumidores y empresas que toman decisiones óptimas bajo las acciones del gobierno, de (212), (227) y (243) se obtienen las nuevas relaciones de sustitución y las nuevas tasas de crecimiento económico:

$$\frac{c}{m} = \frac{i - \tau_r(Ag - \delta)}{1 - \tau_c} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right), \quad (246)$$

$$\frac{\eta}{d} = -\tau_r(Ag - \delta) \left(\frac{\beta}{1 - \beta} \right), \quad (247)$$

$$\varphi_c = \varphi_m = \frac{[(1 - \tau_r)(Ag - \delta) - \rho]}{\gamma}, \quad (248)$$

$$\varphi_\eta = \varphi_d = \frac{[(1 - \tau_r)(Ag - \delta) - \rho]}{\phi}. \quad (249)$$

Como se puede apreciar, las relaciones de sustitución y las tasas de crecimiento son mayores con la participación del gobierno en el desarrollo tecnológico, que en ausencia del mismo. Una vez más, el crecimiento tendrá lugar siempre que $(1 - \tau_r)(Ag - \delta) > \rho$. Para que la desigualdad anterior no se revierta es necesario que $(\tau_r + \delta) < \rho$. Bajo la participación del gobierno en el desarrollo tecnológico, la tasa de crecimiento depende directamente del gasto que éste realice por lo que un mayor gasto de gobierno generará una mayor tasa de crecimiento. Asimismo, la tasa de crecimiento económico *per capita* de largo plazo es igual a la de corto plazo. Por otro lado, si se define x como el capital neto de deuda, es decir:

$$x = k - d - b, \quad (250)$$

entonces de (227) y (243) se obtiene que:

$$\frac{dx}{dt} = (Ag - \delta - \mu)x - c. \quad (251)$$

Si se sustituye, por ejemplo, la solución general del consumo en (251) dada por:

$$c = c(0) \exp \left\{ \left[\frac{(1 - \tau_r)(Ag - \delta) - \rho}{\gamma} \right] t \right\}, \quad (252)$$

entonces la solución para la ecuación diferencial de primer orden no homogénea resultante en x es:

$$x = \left[x(0) - \frac{c(0)}{\Omega} \right] \exp[(Ag - \delta - \mu)t] + \frac{c(0)}{\Omega} \exp \left\{ \left[\frac{(1 - \tau_r)(Ag - \delta) - \rho}{\gamma} \right] t \right\}, \quad (253)$$

donde $\Omega = (1 - \tau_r)(Ag - \delta)(\gamma - 1/\gamma) + \rho/\gamma - \mu$. Observe que $\Omega > 0$. Ahora bien, al combinar (249) con la definición de la riqueza real del individuo representativo $a = k + m - d$ se tiene que:

$$a = x + m + b. \quad (254)$$

En consecuencia, se cumplen las siguientes condiciones límite:

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} a e^{-(A-\delta-\mu)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} x e^{-(A-\delta-\mu)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} m(0) e^{-\Omega t}. \quad (255)$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación (252), se obtiene:

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(x(0) - \frac{c(0)}{\Omega} \right) + \frac{c(0)}{\Omega} e^{-\Omega t} \right], \quad (256)$$

es decir, $c(0) = [k(0) - d(0) - b(0)]\Omega$. Para que el consumo inicial sea positivo es necesario suponer que $k(0) > d(0) + b(0)$, por lo tanto:

$$x = \frac{c(0)}{\Omega} \exp \left\{ \left[\frac{(1 - \tau_r)(Ag - \delta) - \rho}{\gamma} \right] t \right\}, \quad (257)$$

De la ecuación (257), se puede obtener la tasa de crecimiento para el consumo, la cual está dada por:

$$\varphi_c = \frac{[(1 - \tau_r)(Ag - \delta) - \rho]}{\gamma}, \quad (258)$$

A continuación se realiza un análisis del impacto de los impuestos y el gasto gubernamental sobre el bienestar económico, así como la determinación del nivel óptimo de gasto público necesario para el desarrollo tecnológico.

Para poder medir el impacto que tienen los impuestos y el gasto aplicado al desarrollo tecnológico se obtiene la función de utilidad indirecta, $\mathcal{W}$. Asimismo, para poder analizar el bienestar económico en términos de un gasto inicial ahora se utiliza una expansión en serie de Taylor de $g(t)$, de tal forma que:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + o(t), \quad (259)$$

donde $o(t)$ es el término de error. Bajo este supuesto, la función de utilidad indirecta o bienestar económico está dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \frac{[c(0)^\alpha m(0)^{1-\alpha}]^{1-\gamma}}{1-\gamma \left[\rho - \mu - \frac{1-\gamma}{\gamma} [(1-\tau_r)(Ag(0) - \delta) - \rho] \right]} \\ & - \frac{[\eta(0)^\beta d(0)^{1-\beta}]^{1+\phi}}{1+\phi \left[\rho - \mu - \frac{1+\phi}{\phi} [(1-\tau_r)(Ag(0) - \delta) - \rho] \right]} \\ & + tO\left(\frac{g'(0)}{t}\right), \end{aligned} \quad (260)$$

en donde $O(g'(0)/t)$ es tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tO\left(\frac{g'(0)}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{O\left(\frac{g'(0)}{t}\right)}{\frac{1}{t}} = \text{constante}. \quad (261)$$

Esta constante depende de $g'(0)$. Como se puede apreciar en (260), el bienestar económico depende de; los parámetros α y β , que miden el impacto del consumo, dinero, trabajo y deuda sobre el bienestar económico del individuo; de los parámetros γ y ϕ , que miden la elasticidad intertemporal de sustitución; del parámetro de preferencias ρ ; de la tasa de crecimiento de la población μ ; del impuesto sobre los ingresos del capital τ_r ; del nivel tecnológico existente A ; de la depreciación del capital δ y del gasto inicial del gobierno, $g(0)$, asignado para la generación de tecnología. Para asegurar que $\mathcal{W}$ esté acotada es necesario que:

$$(\rho - \mu) > \max \left\{ \frac{1-\gamma}{\gamma} [(1-\tau_r)(Ag(0) - \delta) - \rho], \frac{1+\phi}{\phi} [(1-\tau_r)(Ag(0) - \delta) - \rho] \right\}. \quad (262)$$

Al recordar que el impuesto a los ingresos del capital, como instrumento de política fiscal, no es modificado sustancialmente a lo largo del tiempo por las autoridades fiscales de una economía, se puede tomar como una constante, por lo que la derivada de la función que mide el bienestar económico con respecto a τ_r es:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tau_r} = \frac{[\eta(0)^\beta d(0)^{1-\beta}]^{1+\phi} \left(\frac{1+\phi}{\phi}\right) [(Ag(0) - \delta)\tau_r]}{\left\{1 + \phi \left[\rho - \mu - \frac{1+\phi}{\phi} [(1 - \tau_r)(Ag(0) - \delta) - \rho]\right]\right\}^2} - \frac{[c(0)^\alpha m(0)^{1-\alpha}]^{1-\gamma} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) [(Ag(0) - \delta)\tau_r]}{\left\{1 - \gamma \left[\rho - \mu - \frac{1-\gamma}{\gamma} [(1 - \tau_r)(Ag(0) - \delta) - \rho]\right]\right\}^2} < 0. \quad (263)$$

De esta manera, un aumento en el impuesto sobre la renta disminuye el bienestar económico. Por otro lado, si se deriva la función que mide el bienestar económico con respecto del gasto inicial $g(0)$, se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g(0)} = \frac{[c(0)^\alpha m(0)^{1-\alpha}]^{1-\gamma} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) [(1 - \tau_r)A]}{\left\{1 - \gamma \left[\rho - \mu - \frac{1-\gamma}{\gamma} [(1 - \tau_r)(Ag(0) - \delta) - \rho]\right]\right\}^2} - \frac{[\eta(0)^\beta d(0)^{1-\beta}]^{1+\phi} \left(\frac{1+\phi}{\phi}\right) [(1 - \tau_r)A]}{\left\{1 + \phi \left[\rho - \mu - \frac{1+\phi}{\phi} [(1 - \tau_r)(Ag(0) - \delta) - \rho]\right]\right\}^2} \geq 0. \quad (264)$$

En consecuencia, un aumento en el nivel de gasto inicial del gobierno para generar desarrollo tecnológico incrementa el bienestar.

En seguida se determina el nivel óptimo de gasto de gobierno a través de un ejercicio de simulación en donde los parámetros, que determinan las características de la economía, son analizados en diferentes escenarios. Para ello, la ecuación (264) se iguala a cero y se resuelve con el método de Newton Raphson para encontrar los puntos críticos. Las condiciones de la simulación base, sobre la cual se llevaron a cabo 11 simulaciones adicionales, son las siguientes; se fijaron valores de 0.9 para las condiciones iniciales del consumo, saldos reales, trabajo y deuda, es decir, se supone que el individuo utiliza cantidades iniciales de todos sus recursos cercanas a la unidad (el 0.1 restante lo destina a costos de transacción, excluyendo impuestos).

Los parámetros que miden el impacto del consumo, saldos reales, trabajo y deuda sobre el bienestar económico cumplen con $\alpha = \beta = 0.5$, lo que significa que todos los argumentos de la función de utilidad tienen el mismo impacto. Por otra parte, dado que las elasticidades intertemporales de sustitución tienen que cumplir con $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$ y $\phi > 1$, se propuso que $\gamma = \phi = 1.5$, es decir, el grado de sensibilidad de sustitución del consumo por saldos reales y de trabajo por deuda es mayor a la unidad, por lo que le es más fácil para el consumidor sustituir, respectivamente, uno por otro.

Asimismo, se fijó $\rho = 0.5$ lo que supone que el individuo no está ni impaciente por el consumo presente ni por el consumo futuro. Por otro lado, la tasa de crecimiento de la población se determinó en 0.025 ó 2.5%, valor que, de acuerdo con INEGI (2005), se asemeja en la realidad a la tasa de crecimiento promedio anual, en la última década, del conjunto de países más poblados del mundo (China, India, Estados Unidos, Indonesia, Brasil, Nigeria, Japón y México).

Respecto al parámetro tecnológico de la economía, éste se normalizó a la unidad, es decir $A = 1$, de tal forma que se puede interpretar como el nivel tecnológico existente en la economía hasta ese momento. Con respecto a la depreciación, el valor correspondiente se fijó en 0.05 ó 5%. Por último, el impuesto sobre la renta se fijó en 30%, tasa cercana a la que se aplica en la mayoría de los sistemas hacendarios del mundo. El Cuadro 14 muestra el primer conjunto de simulaciones realizadas, las áreas sombreadas muestran los cambios hechos en los correspondientes parámetros para cada simulación.

Es importante tomar en cuenta dos cosas: primero, todos los parámetros, incluyendo los correspondientes a las elasticidades, están en puntos porcentuales. De esta manera, el nivel de gasto de gobierno obtenido también lo estará; y segundo, que el nivel óptimo de gasto de gobierno que se obtiene en todas las simulaciones, al ser

siempre positivo, es suficiente para aumentar el bienestar económico. Razón por la cual, la participación del gobierno en la economía a través del gasto en desarrollo tecnológico tiene un efecto positivo.

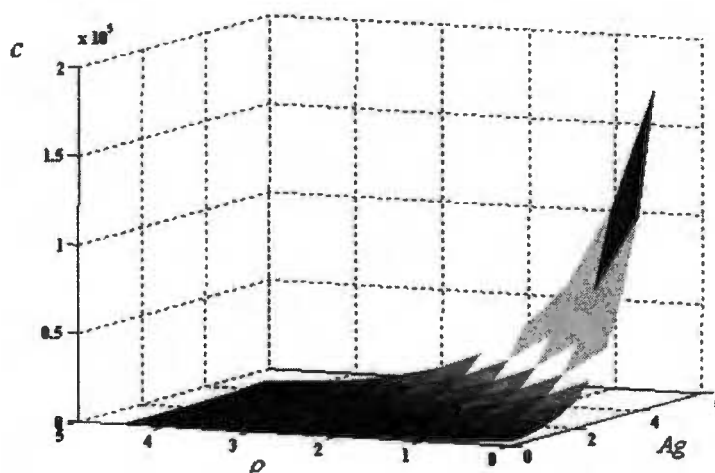
Cuadro 14. Gasto de gobierno óptimo

Simulaciones							
	1	2	3	4	5	6	7
g	0.0479	0.0106	0.0087	0.0479	0.0479	0.0460	0.0422
$c(0)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$m(0)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$\eta(0)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$d(0)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
α	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
β	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
γ	1.5	0.8	5	1.5	1.5	1.5	1.5
ϕ	1.5	1.8	5	1.5	1.5	1.5	1.5
ρ	0.5	0.5	0.5	0.9	0.1	0.5	0.5
μ	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.026	0.028
A	1	1	1	1	1	1	1
δ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
τ_r	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

La simulación número 1, que es la que se toma como base, arroja un nivel de gasto de gobierno de 4.79 puntos porcentuales por arriba del gasto inicial del gobierno, es decir, es la participación mínima adicional necesaria para promover el cambio tecnológico y, por ende, para incrementar el nivel de bienestar de los hogares. Con estas condiciones, cualquier gasto de gobierno por debajo de dicha cifra no tiene efectos positivos sobre el bienestar. Con un gasto de gobierno de 4.79 puntos porcentuales, y manteniendo fijos

los demás parámetros, la trayectoria óptima del consumo está dada por la siguiente gráfica:

Gráfica 15
Trayectoria del Consumo ($g = 0.0479$)



Dado que las condiciones iniciales del consumo, saldos reales, trabajo y deuda se consideran constantes, y como los parámetros que miden el impacto sobre el bienestar económico de dicho argumentos no modifican sustancialmente los resultados obtenidos, entonces el resto de las simulaciones están sujetas a cambios sólo en los demás parámetros. Al respecto, la simulación 2 está construida sobre la modificación de las elasticidades intertemporales de sustitución γ y ϕ , las cuales pasaron de 1.5 a 0.8 y 1.8, respectivamente.

Lo que significa que la relación de sustitución es menos sensible para el consumo y los saldos reales, mientras que es más sensible para el trabajo y la deuda. Bajo estas nuevas condiciones el gasto de gobierno necesario sólo tiene que ser 1.06 puntos porcentuales superior al inicial para poder tener un impacto positivo sobre el bienestar. Por otro lado, en las simulaciones 4 y 5 el gasto de gobierno se mantiene en 4.79 puntos porcentuales, cuando se modificó el parámetro de preferencias llevándolo

hasta su límite superior e inferior respectivamente. Lo anterior implica que no importa si el consumidor está impaciente por el consumo presente ($\rho = 0.9$) o por el consumo futuro ($\rho = 0.1$), entonces el gasto de gobierno es, esencialmente, el mismo. Con respecto a modificaciones en la tasa de crecimiento de la población, se observa en las simulaciones 6 y 7 que un aumento en dicha tasa ocasiona que el nivel de gasto de gobierno necesario para incrementar el bienestar económico sea menor. A continuación, en el cuadro 15, se presentan el resto de las simulaciones realizadas.

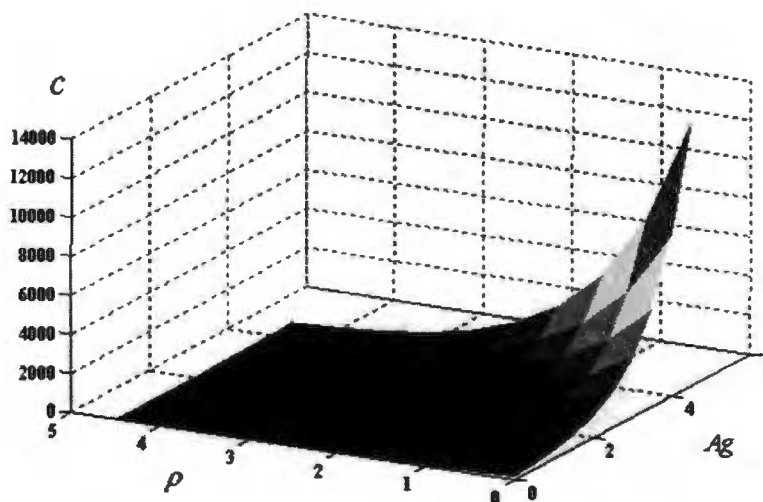
Cuadro 15. Gasto de gobierno óptimo (continuación)

Simulaciones					
	8	9	10	11	12
g	0.0399	0.0080	0.0134	0.0447	0.0419
$c(0)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$m(0)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$\eta(0)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$d(0)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
α	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
β	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
γ	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
ϕ	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
ρ	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
μ	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025
A	1.2	1	1	1	1
δ	0.05	0.1	0.15	0.05	0.05
τ_r	0.3	0.3	0.3	0.25	0.2

Como se aprecia en la simulación 8, un incremento en el nivel tecnológico existente hace que el gasto de gobierno sea de 3.99 puntos porcentuales. Análogamente, aumentos en la tasa de depreciación de 0.05 a 0.1 y 0.15 disminuyen el nivel de gasto de

gobierno a 0.8 y 1.3 puntos porcentuales, respectivamente. Cuando la tasa de depreciación es igual al 15%, el gasto de gobierno es de 1.34 puntos porcentuales, manteniendo constantes los demás parámetros, la trayectoria óptima de consumo para este nivel de gasto se muestra a continuación:

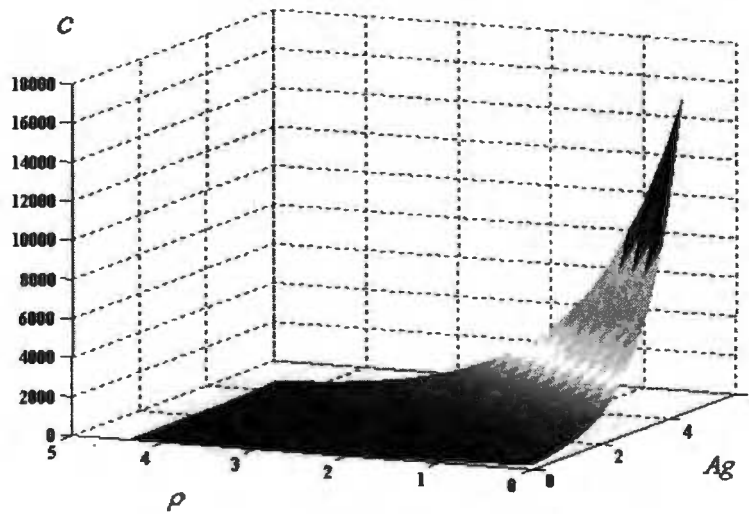
Gráfica 16
Trayectoria del Consumo ($g = 0.0134$)



Se aprecia que, como se redujo el nivel de gasto con respecto al de la Gráfica 16, la trayectoria del consumo es menor ya que su tasa de crecimiento cae en virtud de $\varphi_c = [(1 - \tau_r)(Ag - \delta) - \rho] / \gamma$. Por último, en las simulaciones 11 y 12 se disminuyó el impuesto sobre la renta a 0.25 y 0.20, en consecuencia, el gasto de gobierno sube a 4.47 y 4.19 puntos porcentuales respectivamente.

Análogamente, para un nivel de gasto de 4.19 puntos porcentuales, la trayectoria óptima de consumo se muestra en la Gráfica 17. A diferencia de la Gráfica 16, en la Gráfica 17 la trayectoria del consumo es mayor porque el nivel de gasto aumentó.

Gráfica 17
Trayectoria del Consumo ($g = 0.0419$)



Es importante señalar que el nivel de gasto de gobierno encontrado, en cada una de las simulaciones, es el incremento mínimo necesario en el gasto para aumentar el bienestar económico a través del impulso tecnológico en las empresas. El nivel de gasto de gobierno que genera un cambio tecnológico, como se muestra en la ecuación (239), tiene que ser igual a la unidad.

Por lo tanto, en términos de las simulaciones, el gasto de gobierno necesario para producir un cambio tecnológico tiene que ser mayor o igual a 100 puntos porcentuales, es decir, el gobierno tiene que duplicar su gasto en el desarrollo tecnológico. Dado que en las simulaciones se muestra que incrementos en el gasto de gobierno entre 1 y casi 5 puntos porcentuales aumentan el bienestar económico, se infiere que cuanto más grande sea el gasto del gobierno para modificar el nivel tecnológico de la economía, mayor será el efecto sobre el bienestar económico.

En conclusión, se mostró que la participación del gobierno en la promoción del cambio tecnológico por medio del gasto gubernamental, financiado con impuestos y

deuda pública, genera un mayor crecimiento económico. Las relaciones de sustitución entre consumo y saldos reales, y entre trabajo y deuda son mayores, en el equilibrio de previsión perfecta, cuando se incorpora el gasto del gobierno en el desarrollo tecnológico. Se mostró también, que el impacto que tiene el gasto de gobierno en la generación del cambio tecnológico sobre el bienestar económico es positivo, mientras que un aumento en el nivel de impuestos acarrea consigo una disminución del bienestar económico.

Por último, se determinó el nivel óptimo de gasto de gobierno a través de simulaciones que permitieron modificar las condiciones de los parámetros relacionados con las elasticidades de sustitución, preferencias, crecimiento de la población, nivel de impuestos, tasa de depreciación, nivel tecnológico existente y condiciones iniciales del consumo, saldos reales, trabajo y deuda. Lo anterior, mostró que incrementos entre 1 y 5 puntos porcentuales en el gasto de gobierno aumenta el bienestar económico de los hogares. A través de las gráficas de las trayectorias óptimas del consumo, para niveles distintos de gasto de gobierno, se mostró que niveles mayores de gasto gubernamental destinado al cambio tecnológico, se traduce en mayor consumo y, por ende, en mayor bienestar económico. En consecuencia, niveles superiores de gasto de gobierno que son necesarios para generar un cambio tecnológico tiene un efecto positivo aún mayor sobre el bienestar.

En los modelos analizados hasta ahora el gasto de gobierno ha sido introducido de manera lineal en la función de producción, lo que implica el supuesto de que no existe medida directa alguna que mida el impacto del gasto sobre el producto, sin embargo, es necesario analizar si los efectos positivos se mantiene cuando se rompe con dicho supuesto. Por lo tanto, la introducción no lineal sobre el gasto de gobierno que

generas un cambio tecnológico sobre le capital físico y el capital humano, bajo una estructura analítica en términos nominales, se realiza en el siguiente modelo.

3.8. Gasto de gobierno y su impacto directo sobre el producto

Considerando una economía cerrada, es decir sin relaciones de intercambio con otras economías, los consumidores buscan la máxima satisfacción posible debido a combinaciones de consumo y ocio. Por lo tanto, el valor presente de la utilidad total de los individuos está dada por:

$$U = \int_0^{\infty} u(c, l) e^{-\rho t} dt, \quad (265)$$

en donde c es el consumo *per capita*, l es el ocio *per capita* y ρ es la tasa subjetiva de descuento. Al igual que antes se omitirán los subíndices t , que indican dependencia del tiempo, en las variables pero se deberá tener presente en todo momento que se trata de variables que dependen del tiempo. Se propone la siguiente función de utilidad (satisfacción o felicidad) del consumidor representativo:

$$u(c, l) = \beta \ln c + \delta \ln l, \quad (266)$$

en donde β y δ son parámetros positivos con $\beta + \delta = 1$, que ponderan la satisfacción que proporcionan el consumo y el ocio. Esta especificación del índice de utilidad presenta rendimientos marginales positivos, pero decrecientes. Por lo tanto, unidades adicionales en el consumo del único bien perecedero o en la cantidad de horas dedicadas al ocio, aumentan la satisfacción del individuo pero cada vez en menor magnitud. Suponga también, que el individuo es dueño de la empresa en la cual se produce el bien de consumo, significa que el agente representativo simultáneamente toma decisiones de consumo, ocio y producción. Como la técnica está dada, entonces todos los productores enfrentan las mismas condiciones de producción representadas por:

$$f(k) = Ak\eta, \quad (267)$$

en donde $A > 0$ es el producto marginal del capital y expresa el nivel tecnológico existente en la economía, k es el capital físico utilizado en el proceso de producción y η es el número de horas que un individuo calificado destina al trabajo. Al normalizar a la unidad el total de horas biológicamente disponibles por un ser humano, se tiene que:

$$1 = l + \eta. \quad (268)$$

Equivalentemente,

$$1 - l = \eta. \quad (268')$$

En consecuencia, el productor tiene como insumos al capital físico necesario para la producción del bien y las horas que el trabajador proporciona, utilizadas en el manejo del capital físico. Por lo tanto, el individuo es dueño de la empresa y al mismo tiempo destina horas de trabajo en ella. Es importante señalar que el modelo Ak , utilizado por Harrod (1939) y por Rebelo (1991), proviene de la función de producción Cobb-Douglas, es decir, $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ y dado que los rendimientos a escala son constantes se puede obtener el producto en términos *per capita* al dividir toda la expresión entre L , obteniendo así dicho modelo. Esta simplificación permite analizar los efectos del lado del capital dejando constante la parte del trabajo, sin embargo no significa que sólo se tenga como insumo al capital físico. La función de producción representada en (267) sigue esta misma lógica, y de manera adicional supone que es necesario una cantidad de trabajo capaz de manejar el capital físico de manera más eficiente. Debido a que el individuo asume los roles de consumidor y productor al mismo tiempo, la restricción presupuestal del consumidor se puede expresar como:

$$k_0 = \int_0^\infty pc e^{-(A\eta)t} dt + \int_0^\infty w\eta e^{-(A\eta)t} dt, \quad (269)$$

en donde p es el precio del bien de consumo y w es el salario que se paga al trabajador. El problema de optimización resultante está determinado por (265), (268') y (269), del cual resultan las siguientes condiciones de primer orden:

$$\frac{\beta}{pc} = \lambda, \quad (270)$$

$$\frac{-\delta}{wl} = \lambda, \quad (271)$$

$$\dot{k} = Ak\eta - pc - w\eta, \quad (272)$$

$$A\eta\lambda = -\dot{\lambda} + \rho\lambda, \quad (273)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{-(A\eta)t} = 0. \quad (274)$$

El equilibrio macroeconómico compuesto por los niveles de consumo, ocio, trabajo, capital, producto y la tasa de crecimiento de la economía son, respectivamente:

$$c = \frac{\beta(k_0\rho - w)}{p}, \quad (275)$$

$$l = \frac{\delta(k_0\rho - w)}{w}, \quad (276)$$

$$\eta = 1 - \frac{\delta(k_0\rho - w)}{w}, \quad (277)$$

$$k = k_0, \quad (278)$$

$$y = Ak_0 \left(1 - \frac{\delta(k_0\rho - w)}{w} \right), \quad (279)$$

$$\psi = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} = A\eta - \rho, \quad (280)$$

en donde k_0 es el capital inicial. Se puede observar que el consumo depende de las preferencias de los individuos, del capital inicial con que cuenta el aparato productivo, del precio del bien de consumo y del salario. Por lo tanto, un aumento en el precio del bien disminuye el nivel de consumo, mientras que un mayor capital inicial o un aumento en la ansiedad por el consumo presente, incrementa el nivel de consumo. Por

otra parte, el nivel del ocio depende de manera inversa del salario, y de manera directa del capital inicial y de las preferencias de los individuos. Incrementos en el salario disminuyen el ocio y, por lo tanto, aumentan la cantidad de trabajo, al aumentar la cantidad de trabajo también lo hace el nivel de producto. Por último, la tasa de crecimiento balanceado de la economía depende del nivel tecnológico existente, de la cantidad de horas de trabajo involucradas en el proceso de producción y de las preferencias de los individuos. Si siempre se cumple que $A\eta > \rho$, entonces se tendrá crecimiento, en caso contrario habrá decrecimiento.

Suponga ahora que el gobierno se incorpora a las actividades económicas a través de la generación de nuevas tecnologías y de la capacitación de la mano de obra necesaria para manejar dichas tecnologías, para ello, ejerce un gasto público destinado para cada una de las actividades mencionadas. Tanto la generación tecnológica como la capacitación del trabajo pueden llevarse a cabo al interior de empresas paraestatales, en cuyo caso una vez creado el cambio tecnológico se le transfiere al sector empresarial. O bien, se puede pensar en el sector empresarial de tal forma que el gasto toma el papel de un programa de incentivos al mejoramiento productivo vía el desarrollo tecnológico. Bajo cualquier alternativa, el gasto de gobierno incrementa el nivel tecnológico existente y modifica las condiciones de producción de la siguiente forma:

$$y = Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} k, \quad (281)$$

en donde $g_a > 1$ es el gasto de gobierno destinado a la generación de nueva tecnología, $g_n > 1$ es el gasto de gobierno utilizado para la capacitación del trabajo en el uso de la nueva tecnología y γ es el parámetro que mide el impacto de ambos tipos de gasto público sobre el producto. La condición de que ambos gastos sean mayores a la unidad implica que, tanto el destinado a la generación de nueva tecnología como el aplicado a la capacitación del trabajo en el uso de la misma, tienen que ser los suficientes como

para aumentar el nivel tecnológico existente y el nivel de capacidad del trabajo, de tal forma que se cumpla con:

$$Ag_a > A \quad \text{y} \quad \eta g_n > \eta. \quad (282)$$

Como el gobierno no realiza ninguna otra actividad económica, es decir, no produce, no consume, ni genera satisfacción a los consumidores, entonces la restricción presupuestal del gobierno toma la forma:

$$G = g_a + g_n, \quad (283)$$

en donde G es el gasto total que realiza el gobierno. Con la introducción del gobierno vía la generación tecnológica y la capacitación del trabajo, la restricción presupuestal del consumidor representativo dueño de la empresa se modifica, por lo que ahora se tiene:

$$k_0 = \int_0^\infty pc e^{-(Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma})t} dt + \int_0^\infty w\eta e^{-(Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma})t} dt. \quad (284)$$

Asimismo, con las nuevas condiciones de producción, los niveles de equilibrio de la tasa de interés y del salario son:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} = r, \quad (285)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = Ag_a^\gamma g_n^{1-\gamma} k = w, \quad (286)$$

En consecuencia, el nuevo problema de optimización ahora está determinado por (265), (268') y (284), y sus condiciones de primer orden son:

$$\frac{\beta}{pc} = \lambda, \quad (287)$$

$$\frac{-\delta}{wl} = \lambda, \quad (288)$$

$$\dot{k} = Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} k - pc - w\eta, \quad (289)$$

$$Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} \lambda = -\dot{\lambda} + \rho\lambda, \quad (290)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k e^{-(Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma})t} = 0. \quad (291)$$

Ahora el equilibrio macroeconómico, bajo estas nuevas condiciones, compuesto por los niveles de consumo, ocio, trabajo, capital, producto y la tasa de crecimiento de la economía, son:

$$c = \frac{\beta(k_o \rho - Ag_a^\gamma g_n^{1-\gamma} k_o)}{p}, \quad (292)$$

$$l = \frac{\delta(k_o \rho - Ag_a^\gamma g_n^{1-\gamma} k_o)}{Ag_a^\gamma g_n^{1-\gamma} k_o}, \quad (293)$$

$$\eta = 1 - \frac{\delta(k_o \rho - Ag_a^\gamma g_n^{1-\gamma} k_o)}{Ag_a^\gamma g_n^{1-\gamma} k_o}, \quad (294)$$

$$k = k_o, \quad (295)$$

$$y = Ak_o \left(1 - \frac{\delta(k_o \rho - Ag_a^\gamma g_n^{1-\gamma} k_o)}{Ag_a^\gamma g_n^{1-\gamma} k_o} \right), \quad (296)$$

$$\varphi = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} = Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} - \rho, \quad (297)$$

A partir de la relación establecida en (286) se deduce que aumentos en el gasto de gobierno, destinado tanto a la generación de nueva tecnología como a la capacitación del trabajo en el uso de la misma, incrementa el nivel de salario y en consecuencia cae el ocio, lo que se traduce en un aumento de las horas trabajadas, lo que finalmente conduce a un mayor nivel de producto. Por otra parte, se mantiene la relación inversa entre el precio del bien y el consumo, por lo que, aumentos en los precios disminuyen el consumo. La tasa de crecimiento balanceado de la economía es mayor ya que $\varphi > \psi$, es decir:

$$(Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} - \rho) > (A\eta - \rho). \quad (298)$$

Es importante recordar que se tiene crecimiento siempre que $A\eta > \rho$. Por lo tanto, la participación del gobierno en la generación de un cambio tecnológico a través del gasto

de gobierno en la generación de nueva tecnología y en la capacitación del trabajo en el uso de la misma, tiene un efecto positivo. Lo anterior, se debe a que la inclusión del gobierno genera un incremento en el nivel tecnológico existente, un aumento de la productividad de los factores, un aumento en el salario y una tasa de crecimiento mayor.

Para medir el impacto, sobre el bienestar económico, que tienen cambios en el nivel de gasto de gobierno destinado a la generación de un cambio tecnológico y a la capacitación del trabajo, se obtiene la función de utilidad indirecta, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \int_0^\infty \beta \ln \left[\frac{\beta(k_0 \rho - w)}{p} \right] e^{(Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} - \rho)t} e^{-\rho t} dt \\ & + \int_0^\infty \delta \ln \left[\frac{\delta(k_0 \rho - w)}{w} \right] e^{(Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} - \rho)t} e^{-\rho t} dt. \end{aligned} \quad (299)$$

Al sustituir (286) en (299) y resolver, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \beta \ln \left[\frac{\beta(k_0 \rho - Ag_a^\gamma g_n^{1-\gamma} k_0)}{\rho p} \right] + \frac{\beta(Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} - \rho)}{\rho^2} \\ & + \delta \ln \left[\frac{\delta(k_0 \rho - Ag_a^\gamma g_n^{1-\gamma} k_0)}{Ag_a^\gamma g_n^{1-\gamma} k_0} \right] + \frac{\delta(Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} - \rho)}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (300)$$

En consecuencia, el bienestar económico depende de las preferencias, de los parámetros que miden la satisfacción obtenida por el consumo y el ocio, del capital inicial, del trabajo, del nivel tecnológico existente, de los precios y del gasto de gobierno destinado a la generación de un cambio tecnológico y a la capacitación del trabajo. Por lo tanto, aumentos en el nivel gasto de gobierno destinado a la generación es nueva tecnología, g_a , incrementan el bienestar económico de los hogares, ya que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g_a} = \frac{\gamma r}{g_a \rho^2} - \frac{\gamma}{g_a} (\beta - 2\delta) > 0. \quad (301)$$

Dado que el gasto de gobierno dirigido a la generación de tecnología tiene un impacto positivo, entonces el nivel óptimo de gasto de gobierno, tal que maximiza el bienestar

económico de los hogares, el cual se obtiene al resolver $\partial W / \partial g_a = 0$, que se debe destinar para dicha actividad está dado por:

$$g_a = \left[\frac{(\beta - 2\delta)\rho^2}{A g_n^{1-\gamma} \eta} \right]^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (302)$$

Por su parte, aumentos en el nivel de gasto utilizado en la capacitación del trabajo para el manejo de la nueva tecnología también incrementan el bienestar económico, como lo muestra la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial W}{\partial g_n} = (1 - \gamma) \left(\frac{A g_a^\gamma \eta}{g_n^\gamma \rho^2} \right) - \frac{1 - \gamma}{g_n} (\beta - 2\delta) > 0. \quad (303)$$

Dado que el gasto de gobierno utilizado en la capacitación del trabajo tiene un impacto positivo, entonces el nivel óptimo de gasto de gobierno que se debe destinar para dicha actividad, el cual maximiza el bienestar económico de los hogares y se obtiene al resolver $\partial W / \partial g_n = 0$, es:

$$g_n = \left[\frac{(\beta - 2\delta)\rho^2}{A g_a^\gamma \eta} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (304)$$

Por otro lado, aumentos en el precio del bien de consumo generan una caída en el bienestar económico, como lo muestra la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial W}{\partial p} = -\frac{\beta}{p} < 0. \quad (305)$$

Por último, de (301) y (303) se deduce que un aumento en el nivel de salario mejora las condiciones de vida de los agentes, ya que aumenta el bienestar económico. Lo anterior resulta evidente toda vez que el nivel de salario, que está en función de g_a y de g_n , depende de manera positiva de ambos tipos de gasto, como se determinó en la ecuación (286). Por lo tanto, el gasto de gobierno destinado a la capacitación del trabajo en el manejo de una nueva tecnología tiene efectos directos sobre el nivel de empleo de la economía, como se podrá apreciar de manera más clara a continuación.

Ahora se analizará el efecto sobre la tasa de crecimiento económico por cambios en los parámetros que determinan los niveles óptimos de gasto de gobierno en la generación de nueva tecnología y en la capacitación del trabajo en el uso de la misma. Para ello, se realizan simulaciones que permiten encontrar los niveles óptimos establecidos en las ecuaciones (302) y (304) y que a su vez influyen sobre la tasa de crecimiento económico, como lo muestra la ecuación (297).

Dado que g_a y de g_n se determinan simultáneamente en el modelo, es necesario suponer que el gobierno decide g_a con base en el porcentaje gubernamental de financiamiento, fijado por él mismo, de la proporción del PIB destinada al gasto en inversión y desarrollo tecnológico, esto le permite conocer al mismo tiempo g_n . Lo anterior permite llevar a cabo simulaciones bajo escenarios más realistas y, por lo tanto, examinar el efecto que tienen dichas decisiones sobre el crecimiento.

Para establecer dicha proporción del PIB y el porcentaje gubernamental de financiamiento de la misma se utilizaron los datos presentados en los cuadros 1 y 2. En el primer caso, se tomó un dato intermedio del país (Suecia) que en promedio gasta más en Investigación y Desarrollo, el cual es de 3.80 para el año 2005. El segundo caso se estableció a través del porcentaje gubernamental promedio financiado por el gobierno obtenido para todas las naciones presentadas en el cuadro 2, es decir, 30%. Con ello, los niveles de g_a y de g_n también cumplieron con la condición establecida en (282) al resultar ser mayores que 1.

Por su parte, el resto de los parámetros se determinaron de la siguiente manera; se normalizó el nivel tecnológico existente en la economía, por lo que $A = 1$; se supuso que la proporción de utilidad generada por el consumo es significativamente menor que la proporcionada por el ocio, con el objetivo de medir el impacto sobre el trabajo, es decir $\beta = 0.01$ y $\delta = 0.99$; se tomó $\rho = 0.99$, lo que implica que el consumidor valora

más el consumo presente, reduciendo así al ahorro; se supuso también que el impacto sobre el producto de ambos tipos de gasto es igual, por lo que $\gamma = 0.5$; por último se fijó $\eta = 1$ lo que significa pleno empleo. Todos los valores anteriores son la simulación base, cuando hay cambios en los parámetros (áreas sombreadas) se tienen los siguientes resultados:

Cuadro 16. Efecto sobre la tasa de crecimiento económico

Simulaciones	Base	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
*	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80	3.80
**	30.00	35.00	25.00	15.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00
g_a	1.14	1.33	0.95	0.57	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14
g_n	3.27	2.80	3.46	5.77	1.47	2.44	2.02	1.65	3.56	3.99	5.13	5.89
A	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
β	0.01	0.01	0.05	0.05	0.05	0.10	0.15	0.20	0.05	0.05	0.05	0.05
δ	0.99	0.99	0.95	0.95	0.95	0.90	0.85	0.80	0.95	0.95	0.95	0.95
ρ	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
γ	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
η	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.90	0.85	0.75	0.70
ψ	0.01	0.01	0.01	0.01	0.41	0.01	0.01	0.01	-0.09	-0.14	-0.24	-0.29
φ	0.94	0.94	0.82	0.82	0.82	0.68	0.53	0.38	0.82	0.82	0.82	0.82

* Gasto en Investigación y Desarrollo como proporción del PIB.
 ** Porcentaje financiado por el gobierno.

La simulación base muestra que la tasa de crecimiento es mayor cuando el gobierno destina recursos a la generación del cambio tecnológico que cuando no lo hace. Más todavía, aumentos en el porcentaje de financiamiento realizado por el gobierno ocasionan que el nivel de gasto en la capacitación del trabajo necesario para mantener la misma tasa de crecimiento sea menor, por lo tanto, mayores niveles de g_n incrementan la tasa de crecimiento, como lo muestra la simulación 1.

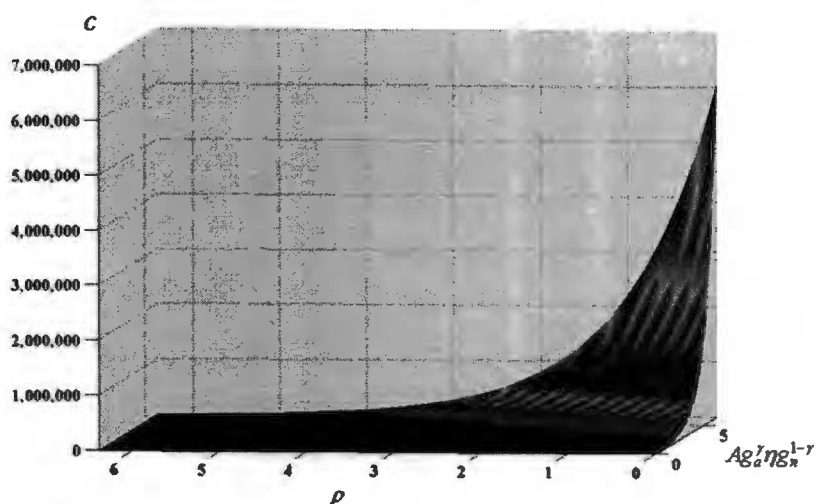
Por el contrario, si dicho porcentaje de financiamiento disminuye entonces cae la tasa de crecimiento, por lo que aumenta el nivel de g_n necesario para mantener el crecimiento económico (simulaciones 2 y 3). Esto significa que el gobierno debe participar de manera significativa en el cambio tecnológico para evitar una caída en la tasa de crecimiento.

Por otro lado, cuando aumenta la proporción de utilidad generada por el consumo y, por ende, cae la proporción de utilidad generada por el ocio, el nivel de g_n necesario para mantener la tasa de crecimiento es menor, mientras que el nivel de g_a permanece constante (simulaciones 4-7). Lo anterior implica que, ante modificaciones en las preferencias de los individuos que ocasionan una disminución en el nivel de actividad económica, aumentos en ambos tipos de gasto compensan dicho efecto sobre la tasa de crecimiento.

Por último, un aumento en el nivel de desempleo (simulaciones 8-11) obviamente ocasiona una disminución en la tasa de crecimiento que sólo puede ser compensada por un aumento en g_n . En otras palabras, el gasto de gobierno destinado a la capacitación del trabajo puede aumentar el nivel de empleo y, por lo tanto, la tasa de crecimiento.

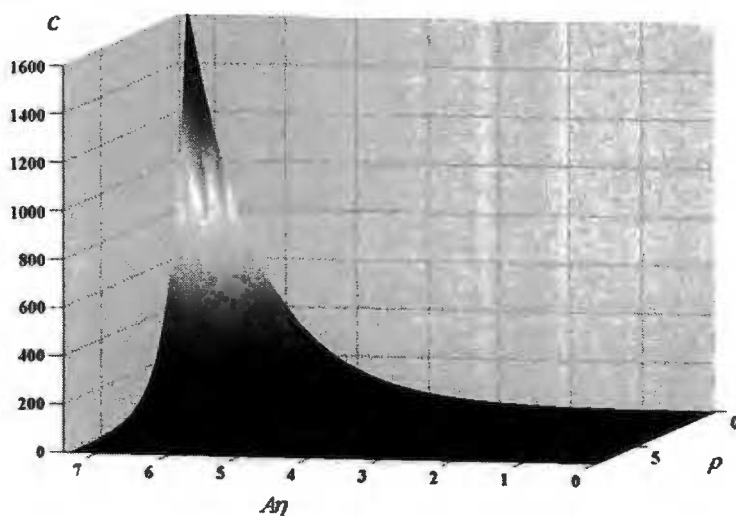
Obsérvese que, para todas las simulaciones, la tasa de crecimiento económico siempre es mayor cuando el gobierno interviene en la generación del cambio tecnológico, vía el gasto en la generación de nueva tecnología y en la capacitación del trabajo en el uso de la misma, que cuando no lo hace. En consecuencia, las trayectorias óptimas del consumo, ocio, trabajo, capital y producto establecidas por (292)-(296) de manera conjunta con (297) crecen más rápido que las trayectorias correspondientes establecidas en (275)-(279) con (280). Por ejemplo, la trayectoria óptima del consumo, cuando crece a la tasa φ , es la siguiente:

Gráfica 18. Trayectoria óptima del consumo ($Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} > \rho$)



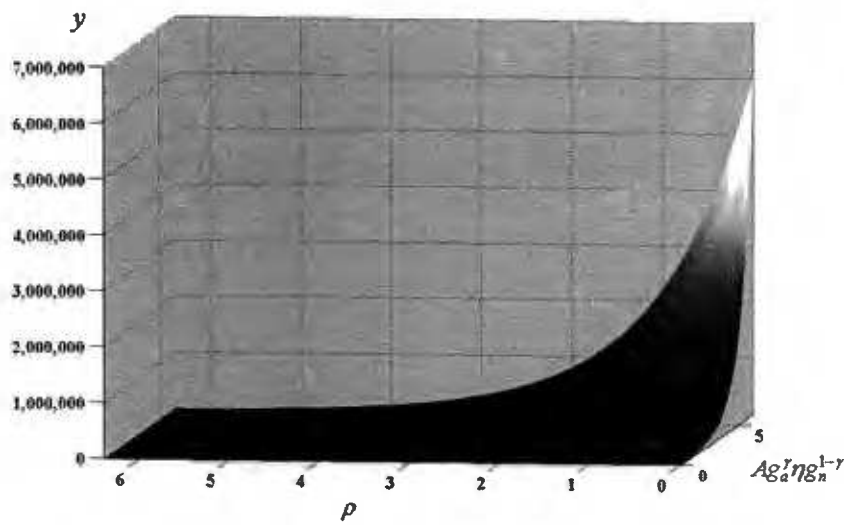
En contraste, la trayectoria es menor cuando crece a la tasa ψ , como lo muestra la siguiente gráfica:

Gráfica 19. Trayectoria óptima del consumo ($A\eta > \rho$)



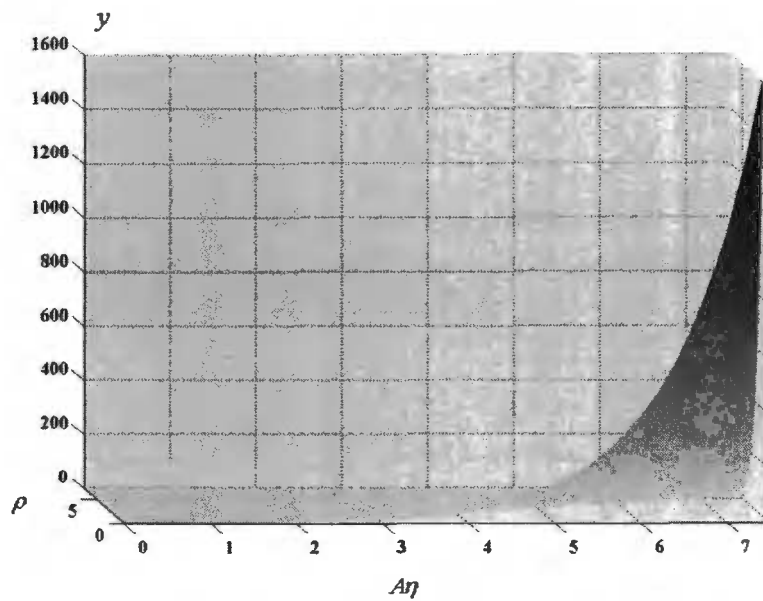
Análogamente, si la tasa de crecimiento es $Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} > \rho$ entonces la trayectoria óptima del producto tendrá el siguiente comportamiento:

Gráfica 20. Trayectoria óptima del producto ($Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} > \rho$)



Sin embargo, dicha trayectoria crecerá a un menor ritmo cuando esté determinada por $A\eta > \rho$, como lo muestra la siguiente gráfica:

Gráfica 21. Trayectoria óptima del producto ($A\eta > \rho$)



Por lo tanto, en un modelo de crecimiento endógeno con agentes que tiene vida infinita y que la tecnología presenta rendimientos constantes a escala, la participación del gobierno en las actividades económicas a través de la generación del cambio tecnológico y la capacitación del trabajo en el uso de nueva tecnología, por medio del gasto gubernamental, tiene efectos positivos en el nivel de consumo, trabajo y producto *per capita*, así como en la tasa de crecimiento económico. Observe además que el nivel de consumo depende inversamente del nivel de precios, mientras que el nivel de ocio tiene la misma relación con respecto al salario. Por lo tanto, aumentos en los precios y en el salario disminuyen, respectivamente, los niveles de consumo y ocio.

El impacto sobre el bienestar económico de los hogares por un aumento en el nivel de gasto, tanto en el desarrollo de nueva tecnología como en la capacitación del trabajo para el manejo de la misma, es positivo. Por su parte, aumentos en el nivel de precios de los bienes de consumo tiene un impacto negativo sobre el bienestar económico.

En consecuencia, políticas gubernamentales destinadas a la generación de nueva tecnología y a la capacitación del trabajo, vía el gasto público, son deseables en economías emergentes. Lo anterior, con el objetivo de alcanzar mayores tasas de crecimiento económico que se traduzcan en mayores niveles de calidad de vida para sus habitantes, tal y como sucede en países desarrollados.

Como se ha mencionado antes, en los 11 modelos que se han analizados respecto a la participación del gobierno en las actividades económicas a través de la generación de nueva tecnología, se ha supuesto una economía cerrada. En el siguiente apartado se levanta dicho supuesto y se analiza el efecto que tiene el gasto de gobierno, destinado al desarrollo de nuevas tecnologías, sobre una economía extranjera con un nivel tecnológico más bajo vía la difusión tecnológica.

3.9. Gasto de gobierno y difusión tecnológica

Del análisis previo se desprende que una economía tiene un nivel tecnológico mayor cuando el gobierno destina recursos para generar un cambio tecnológico. En específico, tanto el gasto de gobierno en la generación de nuevas tecnologías, como en la capacitación laboral para el manejo de la misma conducen un aumento en el nivel tecnológico. En este apartado se analizan los efectos, sobre la tasa de crecimiento, de la difusión tecnológica en una economía menos avanzada. Para ello, de las condiciones establecidas en (282), se sabe que, cuando no existe cambio tecnológico y que cuando dicho cambio está determinado por el gobierno, el nivel tecnológico de una economía es respectivamente:

$$A \quad \text{y} \quad Ag_a^Y. \quad (306)$$

De esta forma, se define como la economía líder (m) aquella cuyo nivel tecnológico es Ag_a^Y , mientras que la economía seguidora (n) tiene un nivel tecnológico igual a A . Para medir los efectos de la difusión tecnológica bajo estas condiciones se utiliza, el modelo propuesto por Nelson y Phelps (1966), el cual establece que

$$\frac{\dot{A}_n}{A_n} = \eta g_n \left(\frac{A_m - A_n}{A_n} \right), \quad (307)$$

en donde $(A_m - A_n)/A_n$ mide la brecha tecnológica existente entre ambas economías y ηg_n mide la tasa de difusión tecnológica de la economía líder hacia la seguidora. Nótese que dicha tasa está en función de la fuerza laboral de la economía seguidora, es decir, depende del gasto que la economía seguidora destina al capital humano. Por otro lado, al utilizar el modelo propuesto por Banks (1994), se tiene que:

$$\frac{\dot{A}_n}{A_n} = \eta g_n + \eta \mu \left(\frac{A_m}{A_n} - 1 \right), \quad (308)$$

en donde μ mide la proporción utilizada de trabajo de la economía seguidora. Observe que, a partir de (308), si μ es pequeña, se sigue que:

$$\frac{\dot{A}_n}{A_n} \approx \eta g_n, \quad A_n = A, \quad (309)$$

lo cual conduce a $A = B e^{\eta g_n t}$, donde B es una constante. De esta forma la velocidad de difusión en capacitación laboral hacia la economía seguidora depende de la magnitud de g_n , es decir, una vez más depende del gasto que la economía seguidora destina al capital humano. En consecuencia, el cambio tecnológico llevado a cabo por la economía líder sólo puede tener un efecto positivo sobre la tasa de crecimiento de la economía seguidora sí, y sólo sí, está última realiza la inversión necesaria para absorberla.

Por lo tanto, ya sea porque se quiere realizar actividades relacionadas con la generación de un cambio tecnológico, o bien porque se desea aprovechar uno realizado por otra economía, el gobierno debe destinar los recursos suficientes para poder lograr un incremento en la tasa de crecimiento económico vía el cambio tecnológico.

Para completar este análisis bajo el ambiente determinista, el modelo siguiente presenta una modificación del comportamiento del consumidor respecto a la información que posee sobre sus preferencias.

3.10. Gasto de gobierno y aprendizaje

Considere una economía en donde los agentes económicos, que viven para siempre, tienen dotaciones iniciales iguales entre sí, preferencias idénticas y una misma tecnología para producir un sólo bien perecedero. Dicha economía no sostiene relaciones de intercambio comercial con otras economías, es decir, es cerrada. Con respecto al consumidor representativo, la teoría neoclásica siempre ha postulado que el individuo es racional ya que tiene información completa sobre los bienes de consumo y

sobre las actividades económicas que existen en el mercado, así como sobre la satisfacción que obtiene debido al consumo de dichos bienes.

Toda esta información está contenida en su función de utilidad y busca la máxima satisfacción posible sujeta su restricción presupuestal. Suponga de manera adicional que el individuo conoce la forma funcional de dicha utilidad pero no así los parámetros de preferencia que aparecen en ella, por lo que, le asigna una distribución *a priori* a estos parámetros. Una vez hecho lo anterior, el individuo aprende al consumir la cantidad que maximiza su utilidad esperada *a priori*, debido a que obtiene información sobre dichos parámetros y la representa en términos de valores esperados. Posteriormente, con la información obtenida, genera una nueva distribución a través de la optimización de medidas de información.

El proceso se puede repetir cuantas veces sea necesario, hasta que el individuo tenga certeza sobre sus parámetros de preferencia. Resulta evidente que entre más rápido pueda determinar dichos valores mayor será su utilidad en cada periodo. En consecuencia, la utilidad esperada del consumidor representativo, al tiempo $t = 0$, está dada por:

$$V = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [u(c; \delta) e^{-\rho t}] \kappa(\delta) d\delta, \quad (310)$$

en donde c es el consumo *per capita*, $\delta > 0$ es el parámetro que mide las preferencias del índice de utilidad, $\kappa(\delta)$ es la distribución *a priori* que describe el conocimiento previo al tiempo $t = 0$ del parámetro δ y $0 < \rho < 1$ es la tasa subjetiva de descuento que mide qué tan ansioso está un individuo por el consumo presente. Suponga que la función de utilidad es:

$$u(c; \delta) = -e^{-\delta c}. \quad (311)$$

Esta especificación del índice de utilidad presenta rendimientos marginales positivos, pero decrecientes, es decir, $u'(c) > 0$ y $u''(c) < 0$. Por su parte, la información adicional que se obtenga sobre δ a través del consumo previo a $t = 0$ se puede representar de la siguiente forma:

$$E(\delta) = \alpha^{-1}. \quad (312)$$

La distribución *a priori* que describe la información disponible en (312) es obtenida a través del principio de máxima entropía, es decir, resultado de resolver:

$$\begin{aligned} \text{Max} - \int_0^{\infty} \kappa(\delta) \log \kappa(\delta) d\delta \\ \text{s. a. } \int_0^{\infty} \kappa(\delta) d\delta = 1, \\ \int_0^{\infty} \delta \kappa(\delta) d\delta = \alpha^{-1}. \end{aligned} \quad (313)$$

La solución del problema anterior que corresponde a la función de densidad exponencial con media α^{-1} , como se muestra en el apéndice correspondiente, es:

$$\kappa(\delta) = \alpha e^{-\alpha\delta}. \quad (314)$$

En consecuencia, la utilidad total descontada establecida en (310) se puede reescribir como:

$$V = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} -e^{-\delta c} \alpha e^{-\alpha\delta} e^{-\rho t} dt d\delta, \quad (315)$$

al resolver para δ se tiene:

$$V = \int_0^{\infty} -\frac{\alpha}{(c + \alpha)} e^{-\rho t} dt. \quad (316)$$

Por otro lado, suponga que el agente representativo toma decisiones de consumo y producción de manera simultánea, es decir, el consumidor es dueño de la empresa en la cual se produce el bien de consumo y al mismo tiempo destina horas de trabajo en ella,

y todos los productores enfrentan las mismas condiciones de producción representadas por la siguiente función del tipo de Harrod-Rebelo (Harrod 1939 y Rebelo 1991):

$$f(k) = Ak. \quad (317)$$

Para cerrar el modelo se incorpora el gobierno a las actividades económicas. Este agente económico realiza una actividad, la cual consiste en la generación de tecnología. El sector público ejerce un gasto que destina hacia dependencias gubernamentales que tienen el objetivo de crear nuevas tecnologías, a través de la investigación y el desarrollo tecnológico. Significa que el gobierno crea de manera directa un cambio en las condiciones tecnológicas que, posteriormente, se transfiere al sector empresarial. En consecuencia, el gobierno modifica las condiciones de producción de la siguiente forma:

$$y = Ag^{\beta} k, \quad (318)$$

en donde $g > 1$ es el gasto de gobierno destinado a la generación de nueva tecnología y β es el parámetro que mide el impacto del gasto público sobre el producto. La condición de que dicho gasto sea mayor a la unidad implica que éste debe alcanzar un nivel suficiente como para aumentar el nivel tecnológico existente, de tal forma que se cumpla con:

$$Ag > A. \quad (319)$$

Como el gobierno no realiza ninguna otra actividad económica, es decir, no produce, no consume, ni genera satisfacción a los consumidores, y como sus ingresos los obtiene a través de un impuesto sobre la renta, entonces la restricción presupuestal del gobierno toma la forma:

$$\tau y = g, \quad (320)$$

en donde τ es el impuesto sobre la renta. Por lo tanto, al tomar en consideración (317), (318), y (320), la restricción presupuestal del consumidor representativo que posee a la empresa es:

$$k_0 = \int_0^{\infty} p c e^{-[A g^{\beta}(1-\tau)]t} dt, \quad (321)$$

en donde p es el precio del bien de consumo. Bajo estas condiciones de producción, la tasa de interés de equilibrio es:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = A g^{\beta}(1-\tau) = r. \quad (322)$$

En consecuencia, al llevar a cabo el análisis en términos nominales, lo que permitirá analizar, el efecto que tienen los precios bajo las condiciones ya establecidas, del problema de optimización determinado por (316), (321) y (322), resultan las siguientes condiciones de optimalidad:

$$\frac{\alpha}{p(c + \alpha)} = \lambda, \quad (323)$$

$$\dot{k} = rk - pc, \quad (324)$$

$$r\lambda = \dot{\lambda} - \rho\lambda, \quad (325)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k e^{-rt} = 0. \quad (326)$$

En esta economía, el equilibrio macroeconómico es:

$$c = \frac{\alpha k_0(2\rho - r)}{p(rk_0 + \alpha)}, \quad (327)$$

$$k = \left[k_0 + \frac{\alpha k_0(r - 2\rho)}{p(rk_0 + \alpha)} \right] e^{rt} + \frac{\alpha k_0(2\rho - r)}{p(rk_0 + \alpha)}, \quad (328)$$

$$k = A g^{\beta} \left[k_0 + \frac{\alpha k_0(r - 2\rho)}{p(rk_0 + \alpha)} \right] e^{rt} + A g^{\beta} \left[\frac{\alpha k_0(2\rho - r)}{p(rk_0 + \alpha)} \right], \quad (329)$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} = 2(r - \rho) = \psi, \quad (330)$$

en donde ψ es a tasa de crecimiento económico balanceado en todos los sectores y, por lo tanto, de la economía. En el equilibrio, las trayectorias de consumo, capital y producto dependen, de manera positiva, del valor medio de la distribución que el consumidor le asigna a su parámetro de preferencias a través de su proceso de

aprendizaje. Por otro lado, depende de manera inversa del nivel de precios y de la tasa subjetiva de descuento. Por su parte, una política fiscal encaminada hacia el aumento en el impuesto sobre la renta ocasiona una caída en el nivel de capital, en el producto y en la tasa de crecimiento. Respecto al gasto de gobierno, al tomar en cuenta la relación establecida en (322), se tiene que un mayor gasto destinado a la generación de tecnología incrementa los niveles de capital y producto, así como aumenta la tasa de crecimiento económico. Dicho crecimiento tendrá lugar siempre que se cumpla con que $Ag^\beta(1 - \tau) > \rho$, en caso contrario, la economía decrecerá. Es importante señalar que la tasa de crecimiento, ϕ , en ausencia del gobierno como agente generador del cambio tecnológico, que corresponde al modelo Ak básico es $\phi = 2[A(1 - \tau) - \rho]$.

En resumen, el impacto que tiene el gasto de gobierno destinado a la generación de nuevas tecnologías sobre el crecimiento económico es positivo. Análogamente, el proceso de aprendizaje por el cual pasa el consumidor tiene un efecto positivo sobre la actividad económica, toda vez que el consumo, el capital y el producto dependen de manera positiva del valor promedio que toma la distribución asignada a las preferencias por parte del consumidor. El impacto positivo de estas dos variables económicas quedará más claro con el siguiente análisis sobre el bienestar económico.

Para poder realizar un análisis sobre el bienestar de los hogares es necesario sustituir (327) y (330) en (316) para obtener el bienestar económico, por lo tanto:

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty -\frac{\alpha}{\left(\frac{\alpha k_0(2\rho - r)}{p(rk_0 + \alpha)} + \alpha\right)} e^{2(r-\rho)t} e^{-\rho t} dt. \quad (331)$$

Si se simplifica la ecuación anterior, entonces se tiene:

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty -\left[\frac{p(rk_0 + \alpha)}{k_0(2\rho - r)} + 1\right] e^{(2r-3\rho)t} dt. \quad (332)$$

Cuando se resuelve (332), se obtiene:

$$\mathcal{W} = \int_0^{\infty} -\frac{p(rk_0 + \alpha)}{k_0(2\rho - r)(3\rho - 2r)} - \frac{1}{3\rho - 2r}. \quad (333)$$

Por lo tanto, el bienestar económico está en función, a través de la tasa de interés real, del nivel tecnológico de la economía, del gasto de gobierno destinado a la generación de tecnología y del impuesto sobre la renta del capital inicial. Asimismo depende de los precios, del valor medio de la distribución de las preferencias y de la tasa subjetiva de descuento. Al obtener la derivada parcial de (333) respecto a r se llega a:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial r} = \frac{2pr^2k_0^2 - 6pk_0^2\rho^2}{[k_0(2\rho - r)(3\rho - 2r)]^2} + \frac{1}{2r^2} > 0, \quad (334)$$

si se recuerda que $0 < \rho < 1$ y $r > 0$, entonces se cumple que la ecuación (334) es positiva. Debido a que $r = Ag^\beta(1 - \tau)$, un aumento en el gasto de gobierno destinado a la generación de tecnología o en el nivel tecnológico de la economía ocasionado por dicho gasto, aumentan la tasa de interés real. Este mismo efecto tiene una disminución del impuesto sobre la renta. En consecuencia, el bienestar económico de los hogares aumenta cuando la tasa de interés se eleva debido a incrementos en A , en g y a decrementos en τ . Por otro lado, al derivar parcialmente $\mathcal{W}$ con respecto a α se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \alpha} = -\frac{p}{k_0(2\rho - r)(3\rho - 2r)} < 0. \quad (335)$$

Variaciones en el valor medio de la distribución del parámetro de preferencias, generada por el proceso de aprendizaje del individuo, provoca caídas en el nivel de bienestar. Lo anterior comprueba que entre más rápido pueda determinar dichos valores mayor será su utilidad en cada periodo. Por último, la derivada parcial de $\mathcal{W}$ con respecto a p es:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} = -\frac{rk_0 + \alpha}{k_0(2\rho - r)(3\rho - 2r)} < 0, \quad (336)$$

por lo que, incrementos en el nivel de precios disminuyen el bienestar económico. Una vez que se ha identificado el impacto sobre el bienestar económico bajo las condiciones establecidas, es necesario determinar el nivel de gasto de gobierno que

permite tener una mayor tasa de crecimiento económico en comparación a la tasa de crecimiento que tendría la economía en ausencia del gobierno en el cambio tecnológico.

Para determinar el nivel de gasto de gobierno es necesario sustituir (322) en (334) y de manera adicional fijar $\tau = 0$, es decir, el gobierno no recauda impuestos. Lo anterior deja a la tasa de interés real sólo en términos del nivel tecnológico de la economía afectado por el gasto del gobierno, esto su vez permite evaluar (334) y obtener el nivel de gasto de gobierno que maximiza el bienestar económico de los hogares e incrementa la tasa de crecimiento, por lo tanto se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial r} = \frac{2p(Ag^\beta)k_0^2 - 6pk_0^2\rho^2}{[k_0(2\rho - Ag^\beta)(3\rho - 2Ag^\beta)]^2} + \frac{1}{2(Ag^\beta)^2} = 0. \quad (337)$$

Por medio del método de Newton Raphson se encuentran los puntos críticos y, a través de un ejercicio de simulación, los parámetros que determinan las características de la economía son analizados en diferentes escenarios y que se presentan a continuación:

Cuadro 17. Efecto del gasto de gobierno sobre la tasa de crecimiento

Escenario	base	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>g</i>	6.06	5.08	6.15	6.93	7.71	5.24	4.43	3.88	2.48	2.46	20.16	36.76	6.19	6.21
<i>p</i>	1.5	1	1.55	2	2.5	2	2	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
<i>A</i>	1	1	1	1	1	1.15	1.25	1	1	1	1	1	1	1
<i>β</i>	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1	0.3	0.25	0.5	0.5
<i>k</i>	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	200	250
<i>ρ</i>	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.9	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
<i>τ</i>	0.30													
<i>ψ</i>	2.45	2.15	2.47	2.68	2.89	2.68	2.68	1.96	0.41	2.45	2.45	2.45	2.48	2.49
<i>φ</i>	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.61	0.75	0.60	-0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40

Hay que tener en cuenta que cuando se supone $p = 1$, la estructura analítica aquí propuesta se transforma en términos reales porque la variable “precios” desaparece del

modelo, para evitarlo el precio del bien de consumo, en el escenario base, se definió igual a 1.5. Asimismo, se normalizó el nivel tecnológico de la economía a la unidad, es decir $A = 1$, se supuso que $\beta = 0.5$ lo que implica que el impacto del gasto del gobierno sobre el producto no es completo, el consumidor no está muy ansioso por el consumo presente ni por el consumo futuro, por lo que $\rho = 0.5$ y, por último, el capital inicial se supuso igual 100. La razón por la cual se hace el análisis en términos nominales es porque incrementos en los precios aumentan el nivel de gasto de gobierno necesario para el cambio tecnológico, como lo muestran los escenarios 3, 4 y 5, bajo una estructura analítica en términos reales no sería posible mostrar lo anterior. Cabe señalar que incluso cuando $p = 1$, el nivel de g se puede determinar y es positivo, como lo muestra el escenario 2.

Por otro lado, el gasto de gobierno que maximiza el bienestar de los hogares es menor cada vez que el nivel tecnológico de la economía aumenta (escenarios 6 y 7). Respecto a la ansiedad por el consumo, el escenario 8 muestra que si el consumidor se vuelve muy ansioso por el consumo futuro, entonces el gasto de gobierno es menor; de igual manera cuando existen ansiedad por el consumo presente el gasto cae (escenario 9). No es extraño encontrar que cuando el impacto del gasto de gobierno sobre el producto es completo, el nivel de dicho gasto tenga que ser menor y viceversa, como lo muestran los escenarios 10, 11, y 12. Finalmente, incrementos en el capital inicial (escenarios 13 y 14), aumentan el gasto de gobierno.

En esta primera parte del Cuadro 17, el gasto de gobierno determinado en cada uno de los escenarios es positivo y cumple con la condición establecida en (319), por lo tanto, los niveles que se muestran generan un cambio tecnológico en la economía. En la segunda parte del mismo cuadro, se presenta el efecto que tiene dicho gasto sobre la tasa de crecimiento económico, para ello es necesario suponer que el gobierno aplica un

30% de impuesto sobre la renta a las empresas, lo cual no es lejano a la realidad. Se puede apreciar que la tasa de crecimiento económico de la economía es siempre positiva y mayor a la correspondiente cuando el gobierno está ausente, es decir, $\psi > \phi$ en todos los escenarios. Lo anterior se traduce en trayectorias óptimas de consumo, capital y producto mayores. Por lo tanto, el impacto positivo del gasto de gobierno destinado a las actividades de investigación y desarrollo tecnológico sobre el crecimiento económico se comprueba.

En conclusión se mostró que, en un modelo de crecimiento endógeno en donde los individuos viven para siempre y la tecnología presenta rendimientos constantes a escala, la participación del gobierno en las actividades económicas a través de la generación del cambio tecnológico vía el gasto gubernamental, tiene efectos positivos en el nivel de consumo, capital y producto en términos *per capita*, así como sobre la tasa de crecimiento económico. Asimismo, en el equilibrio macroeconómico, las trayectorias de consumo, capital y producto dependen de manera positiva del valor medio de la distribución que el consumidor le asigna a su parámetro de preferencias a través de su proceso de aprendizaje. Por su parte, el consumo, el capital y el producto dependen inversamente del nivel de precios, por lo tanto, aumentos en los precios disminuyen la actividad económica. Lo anterior puede ser compensado a través del gasto de gobierno ya que incrementos en los precios elevan el nivel de gasto de necesario para maximizar el bienestar económico de los hogares, lo que se traduce en una mayor tasa de crecimiento.

El impacto sobre el bienestar económico de los hogares debido un aumento en el gasto gubernamental destinado a las actividades en investigación y desarrollo tecnológico es positivo, lo mismo sucede cuando se da una disminución en el impuesto sobre la renta aplicado a las empresas y recaudado por el gobierno. En contra parte,

aumentos en el nivel de precios de los bienes de consumo tiene un impacto negativo sobre el bienestar económico. Por último, variaciones en el valor medio de la distribución del parámetro de preferencias, generada por el proceso de aprendizaje del individuo, provoca caídas en el nivel de bienestar. Por lo tanto, es deseable que entre más rápido pueda determinar el individuo dichos valores mayor será su utilidad en cada periodo.

De lo anterior se deduce que si las políticas gubernamentales están encaminadas a la generación de nueva tecnología, a través del gasto público, las economías emergentes como México podrán crecer a un mayor ritmo, lo que conduciría a aumentos en los niveles de calidad de vida.

3.11. Conclusiones generales respecto al cambio tecnológico generado por el gobierno

Inicialmente se desarrolló un modelo de agente representativo con vida infinita en donde se incorpora la participación del gobierno a través de la inversión en tecnología. Uno de los principales resultados obtenidos es que cuando el gobierno participa en la generación de tecnología, con ello incrementa también el bienestar de los agentes.

Dado que el crecimiento, el cual es balanceado, depende del gasto de gobierno, se concluye que el gobierno tiene fuertes incentivos en participar en la generación de tecnología ya que con ello también afecta los otros sectores. Se encontró además que el gasto de gobierno óptimo que genera el mayor bienestar posible depende de la riqueza inicial y de los parámetros de preferencias de los individuos.

En este primer modelo, la introducción del gasto de gobierno afecta las condiciones de producción por lo que modifica la función de producción de la empresa representativa, dicho gasto se toma como constante y permite determinar el equilibrio

macroeconómico de la economía. Lo anterior ocasionaba que el modelo pudiera no tener estado estacionario, sin embargo, en la propuesta siguiente se mostró que la participación del gobierno en la generación de nuevas tecnologías vía el gasto, financiado con un impuesto al consumo, tiene un impacto positivo sobre el crecimiento económico y maximiza el bienestar de los hogares. De hecho, existe un nivel óptimo de gasto de gobierno que se destina a la generación de nueva tecnología tal que maximiza el bienestar económico de los hogares, bajo diferentes hipótesis de evaluación del costo social inherente al gasto de gobierno.

Por lo tanto, la investigación arroja que cuando el gobierno decide su nivel óptimo de gasto de gobierno en función del máximo bienestar de los agentes, éste debe ser constante. En consecuencia, la participación del gobierno en la generación de nueva tecnología modifica las condiciones de producción y genera un cambio tecnológico cada vez que invierte una magnitud constante, por lo que, el cambio tecnológico sucede para cada momento t . Dicho gasto genera un salto en las condiciones tecnológicas de la economía y produce una mayor productividad del capital.

Una vez que fueron establecidas las condiciones bases respecto a la participación del gobierno, se desarrolló un nuevo modelo de agente representativo con vida infinita en donde se incorporó la participación del gobierno a través de la inversión en tecnología de manera conjunta con emisión de dinero, al introducir una restricción *cash-in-advanced* al comportamiento del consumidor. Asimismo se incorporó el dinero en la función de utilidad del agente. Se mostró que la tasa de crecimiento económico es mayor cuando el gobierno genera un cambio tecnológico y además en ambos casos, dicha tasa, no depende de la tasa de expansión monetaria, es decir, el dinero es neutral.

La aplicación económica de los modelos anteriores así como los análisis correspondientes, a saber; el del desarrollo tecnológico y la habilidad laboral, que utilizó

estructuras analíticas en términos reales y en términos nominales; el del gobierno como promotor del cambio tecnológico en donde además se introdujo el trabajo, el dinero y la deuda; el de la introducción no lineal del gasto de gobierno que permite medir el impacto del mismo sobre el producto; el de economía abierta que estudia los efectos de la difusión tecnológica; y el del gobierno y el aprendizaje del consumidor, todos verificaron los resultados respecto a que la tasa de crecimiento económico es mayor cuando el gobierno participa en las actividades económicas, a través de la generación de nuevas tecnologías, que cuando el gobierno está ausente. Lo anterior debido a que la tasa de crecimiento depende de dicho nivel de gasto gubernamental.

Los resultados encontrados por los modelos teóricos realizados en este apartado permiten dar respuesta a la primera pregunta de investigación, la cual es, ¿Cuál es el efecto que el gobierno como agente generador del cambio tecnológico tiene sobre el crecimiento económico? La respuesta es que el gobierno afecta de manera positiva a la tasa de crecimiento de la economía toda vez que su participación, vía el cambio en las condiciones tecnológicas de la economía, en efecto modifica el nivel tecnológico de la economía e incide de manera directa y positiva en la tasa de crecimiento. Más todavía, el gobierno puede determinar el nivel óptimo de su gasto en función del máximo bienestar de los hogares.

A pesar de lo anterior, las principales limitaciones que se encuentran en los modelos ya comentados consisten en suponer que el gobierno sólo interviene en la generación de tecnología, que el único ingreso del gobierno se da a través de un impuesto al consumo o por medio de un impuesto sobre la renta, fijar de manera exógena la tasa de depreciación, abrir la economía sólo para analizar los efectos de la difusión tecnológica y que las variables se modelan de manera determinista.

Por lo tanto, es necesario estudiar los posibles efectos que pueda tener el comercio internacional sobre el crecimiento, modelar las variables como la tasa de interés, los precios, y la tasa de crecimiento de manera estocástica para verificar que los resultados se mantienen. En consecuencia, futuros desarrollos teóricos deberán extender el análisis a una economía estocástica y abierta, que además incorpore otras variables financieras relevantes así como establecer actividades económicas gubernamentales más amplias.

En el siguiente capítulo, se analizará el efecto que tiene sobre la tasa de crecimiento económico el cambio tecnológico generado de manera simultánea por empresas y gobierno. Al mismo tiempo se profundizarán los microfundamentos establecidos por la teoría económica, en materia del cambio tecnológico, para explicar cómo se da el proceso del cambio tecnológico. Para ello, se utilizarán modelos de crecimiento endógeno estocásticos con lo que se romperá con la limitación ya comentada respecto a la modelación de las variables de manera determinista.

4. El proceso del cambio tecnológico público y privado

A partir de ahora se estudia el impacto que tiene sobre el crecimiento un cambio tecnológico generado por el sector público y el sector privado al mismo tiempo, el análisis incorpora microfundamentos más profundos que explican la forma en la cual el proceso de un cambio en las condiciones tecnológicas ocurre al interior de ambos sectores y, además, se modelarán dichos fenómenos utilizando ambientes estocásticos. Lo anterior permite analizar las dinámicas del equilibrio macroeconómico en función del cambio en las condiciones tecnológicas de la economía.

4.1. El cambio tecnológico público y privado

En principio, este primer modelo tratará de verificar simplemente si el efecto debido a la generación del cambio tecnológico generado por empresas y gobierno es positivo sobre la tasa de crecimiento. Por lo que, la profundización de los microfundamentos se hará posteriormente en otros modelos. Para lo anterior se incorporan empresas y gobierno, de manera simultánea, en el proceso de cambio tecnológico y el análisis será el último que se desarrolle bajo ambientes deterministas. Dicho análisis parte de las hipótesis planteadas en el apartado 3.3, las cuales se recuerdan brevemente en seguida.

Al suponer que el cambio tecnológico era generado sólo por el gobierno, como consecuencia de la decisión de no realizar actividades de investigación y desarrollo tecnológico por parte de las empresas debido al poco desarrollo de mercado, o a la ausencia de una institución que garantice los derechos de autor, patentes, etc., o por cualquier otra causa que generara que las empresas tuvieran la certeza de que dichas actividades no generarían ganancias adicionales, se había establecido que el cambio tecnológico se podía medir a través de:

$$y_t = Ag_t k_t, \quad (338)$$

en donde $g_t > 0$ es el gasto *per capita* que el gobierno destina para la generación de nuevas condiciones tecnológicas y es obtenido a través de un impuesto al consumo por lo que:

$$g_t = \tau_c c_t. \quad (339)$$

En la economía el individuo representativo toma decisiones de producción y consumo, es decir, maximiza su nivel de utilidad sujeto a la restricción presupuestal las cuales están representadas por:

$$U = \int_0^{\infty} \ln c_t e^{-\rho t} dt, \quad (340)$$

$$k_0 = \int_0^{\infty} (1 + \tau_c) c e^{-r_t t} dt, \quad (341)$$

Las condiciones de primer orden junto con el equilibrio macroeconómico están dados por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t (1 + \tau_c), \quad (342)$$

$$\dot{k}_t = A g_t k_t - (1 + \tau_c) c_t, \quad (343)$$

$$A g_t \lambda_t = -\dot{\lambda}_t + \lambda_t \rho, \quad (344)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_t e^{-A g_t t} = 0. \quad (345)$$

$$c_t = \frac{\rho k_0}{(1 + \tau_c)} e^{(A g_t - \rho)t}, \quad (346)$$

$$k_t = k_0 e^{(A g_t - \rho)t}, \quad (347)$$

$$y_t = A g_t k_0 e^{(A g_t - \rho)t}, \quad (348)$$

$$\psi_t = A g_t - \rho. \quad (349)$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento de la economía depende del gasto de gobierno destinado a la generación de tecnología. Asimismo, en el apartado 3.3 se establecieron las condiciones bajo las cuales el cambio tecnológico se generaba a partir de la participación del gobierno. Dado que el cambio tecnológico público ocurre, suponga ahora que el cambio tecnológico se puede dar también a través del sector privado, una vez que las empresas han decidido intervenir en el progreso tecnológico. Dicho cambio se puede dar por medio del capital humano, h_t , que es considerado como fuerza de trabajo con habilidades especiales, que deciden contratar en lugar de fuerza laboral sin habilidades para participar en el proceso de producción. El capital humano está definido de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$h_t = \nu l_t, \quad (350)$$

en donde l_t representa a un trabajador y ν el capital humano que este posee. Hay que recordar que la cantidad de trabajo, l_t , y la calidad del trabajo, ν , son sustitutos perfectos

en la esfera de la producción, en el sentido que lo que importa sólo es la combinación vl_t por producto. En consecuencia es necesario suponer que la fuerza laboral disponible en la economía no crece y que, por lo tanto, el progreso tecnológico sólo puede darse por un incremento en el capital humano.

Por otro lado, suponga que el producto puede ser usado para el consumo o para invertir en capital humano y que tanto el capital físico como el capital humano se puede depreciar a una misma tasa δ . La depreciación del capital humano consiste en la pérdida de habilidades debido al paso del tiempo. En consecuencia, cambios en ambos tipos de capitales están dados por:

$$\dot{k}_t = i_t^k - \delta k_t, \quad (351)$$

$$\dot{h}_t = i_t^h - \delta h_t, \quad (352)$$

en donde $i_t^k \geq 0$ es la inversión *per capita* en capital físico e $i_t^h \geq 0$ es la inversión *per capita* en capital humano. Por lo tanto, la restricción de los recursos de la economía es:

$$y_t = c_t + i_t^k + i_t^h. \quad (353)$$

Con la introducción del capital humano al proceso productivo las condiciones de producción de la empresa representativa se han modificado, por lo que, y al suponer una función de producción Cobb-Douglas, la ecuación (338) se puede reescribir como:

$$y_t = Agk_t^\alpha h_t^{1-\alpha}. \quad (354)$$

Significa que la restricción presupuestal del agente representativo está dada por la siguiente ecuación de acumulación de capital físico:

$$\dot{k}_t = Agk_t^\alpha h_t^{1-\alpha} - (1 + t_c)c_t - i_t^k - i_t^h. \quad (355)$$

Por lo tanto, las remuneraciones a los factores de la producción, capital físico y capital humano, respectivamente son:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \alpha Agk_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha} - \delta = r \quad (356)$$

$$\frac{\partial y}{\partial h} = (1 - \alpha)Agk_t^\alpha h_t^{1-\alpha} - \delta = w \quad (357)$$

Bajo estas hipótesis, las condiciones de primer orden (condiciones necesarias) para una solución interior resultantes del problema de optimización dado por (340), (351), (352) y (355) son:

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t(1 + \tau_c), \quad (358)$$

$$\mu_t = \lambda_t, \quad (359)$$

$$\omega_t = \lambda_t, \quad (360)$$

$$\dot{k}_t = Agk_t^\alpha h_t^{1-\alpha} - (1 + t_c)c_t - i_t^k - i_t^h, \quad (361)$$

$$\dot{k}_t = i_t^k - \delta k_t, \quad (362)$$

$$\dot{h}_t = i_t^h - \delta h_t, \quad (363)$$

$$-\dot{\lambda}_t + \lambda_t \rho = (\alpha Agk_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha})\lambda_t + \delta \mu_t, \quad (364)$$

$$-\dot{\omega}_t + \omega_t \rho = [(1 - \alpha)Agk_t^\alpha h_t^{1-\alpha}]\lambda_t + \delta \omega_t. \quad (365)$$

Cuando se despeja $\dot{\lambda}_t$ de la ecuación (364), se resuelve la ecuación diferencial resultante y posteriormente se sustituye λ_t en (358) se obtiene la tasa de crecimiento del consumo dada por la siguiente ecuación:

$$\varphi_c = \alpha Ag \left(\frac{k}{h} \right)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho. \quad (366)$$

Por otro lado, las ecuaciones (364) y (365) muestran que la productividad marginal del capital físico es $\alpha Agk_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha} - \delta$ y que la productividad marginal del capital humano es $(1 - \alpha)Agk_t^\alpha h_t^{1-\alpha} - \delta$. Evidentemente, la productividad de ambos tipos de capital es mayor cuando el cambio tecnológico también es generado por el gobierno que cuando el gobierno está ausente en dichas actividades. Al igualar ambas productividades y al despejar la relación capital físico entre capital humano se obtiene:

$$\frac{k}{h} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \quad (367)$$

En consecuencia, la tasa de crecimiento de la economía, la tasa de interés y salario de equilibrio, considerando siempre las condiciones de transversalidad correspondientes, que resultan de la sustitución de (367) en (366), (356) y (357) respectivamente son:

$$\varphi = Ag\alpha^\alpha(1 - \alpha)^{1-\alpha} - \delta - \rho, \quad (368)$$

$$r = w = Ag\alpha^\alpha(1 - \alpha)^{1-\alpha} - \delta. \quad (369)$$

Se puede apreciar que la tasa de crecimiento de la economía, en este caso depende de los parámetros tecnológicos del sector privado y del gasto de gobierno destinado a la generación de nuevas tecnologías. El salto en las condiciones tecnológicas de la economía ocasionado se mide a través de Ag , mientras que el aumento en la productividad se puede medir por medio de αAg . Asimismo, esta tasa es mayor cuando el cambio tecnológico se da a través de empresas y gobierno que cuando sólo el gobierno interviene en la generación del cambio tecnológico, y obviamente mayor que en ausencia de ambos, es decir, $\varphi > \psi$. Asimismo, el salario y la tasa de interés real aumentan conforme se incrementan el gasto de gobierno y los coeficientes tecnológicos de las firmas.

Por lo tanto, la tasa de crecimiento económico es mayor sí, al mismo tiempo, empresas y gobierno modifican las condiciones tecnológicas de la economía. En el equilibrio, la tasa de crecimiento y los niveles de tasa de interés y salarios dependen de las condiciones tecnológicas del sector privado y de los recursos que el gobierno destina a la generación de nuevas tecnologías. En consecuencia, políticas públicas encaminadas a ejercer un gasto para fomentar el progreso tecnológico y actividades empresariales con el mismo objetivo son deseables en las economías, sobre todo en vías de desarrollo.

Para comenzar en entender como el cambio tecnológico puede ser explicado bajo ambientes de incertidumbre, introducidos por Merton (1975), enseguida se

plantean las condiciones bases sobre las cuales la economía evoluciona bajo este tipo de ambientes y análogamente se modela la evolución tecnológica.

4.2. La evolución tecnológica

De manera similar, los supuestos bases para este modelo son una economía cerrada en donde los agentes tienen vida infinita, dotaciones iniciales idénticas y además toman decisiones de producción y de consumo de manera simultánea. Asimismo, se produce un único bien bajo las condiciones de producción establecidas por la siguiente ecuación:

$$dy = Ak, \quad (370)$$

en donde A mide el nivel tecnológico de la economía, mismo que presenta una dinámica debido a las innovaciones radicales e incrementales que se realizan gracias a la investigación y desarrollo tecnológico tanto público como privado. Por lo tanto, dicha dinámica se puede representar a través de un proceso de difusión de Wiener, de tal forma que:

$$dA = A\mu_a dt + A\sigma_a dw, \quad (371)$$

en donde μ_a es el nivel tecnológico instantáneo esperado, es decir, la trayectoria promedio sobre la cual la tecnología evoluciona, σ_a representa la volatilidad tecnológica generada por la evolución en términos de innovaciones radicales e incrementales que son hechos al interior del los sectores públicos y privados, y dw es una variable aleatoria que se distribuye de manera normal con media cero y varianza $\sigma_a^2 dt$. Como se ha acostumbrado, se supone que los individuos toman al mismo tiempo decisiones de producción y consumo, por ende la restricción presupuestal del agente representativo se puede escribir como:

$$dk = k dR_A - c dt, \quad (372)$$

en donde c es el consumo *per capita* y dR_A es la evolución tecnológica ya descrita de la economía, es decir:

$$dR_A = \frac{dA}{A} = \mu_a dt + \sigma_a dw. \quad (373)$$

Al sustituir la ecuación (373) en la restricción presupuestal establecida en (372) se obtiene la siguiente ecuación de acumulación de capital:

$$dk = k \left(\mu_a - \frac{c}{k} \right) dt + k \sigma_a dw. \quad (374)$$

Por otro lado, los agentes obtienen utilidad sólo al consumir el único bien producido en la economía, de acuerdo al valor esperado de la siguiente función de utilidad:

$$E \int_0^{\infty} u(c) e^{-\rho t} dt, \quad (375)$$

en donde $u'(c) > 0$ y $u''(c) < 0$ y se supone una utilidad logarítmica para el consumidor representativo, es decir $u(c) = \ln c$. Bajo estas consideraciones la función de utilidad von Neumann-Morgenstern separable al tiempo t es:

$$V = E \left\{ \int_t^{\infty} \ln c e^{-\rho s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right\}, \quad (376)$$

en donde $\mathcal{F}_t$ es la información disponible para el consumidor en cada tiempo t . La condición *Hamilton-Jacobi-Bellman* resultante del problema de control óptimo estocástico de maximizar la utilidad esperada (376) sujeto a la restricción presupuestal intertemporal (374) es:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + k V'(k) \left(\mu_a - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 \sigma_a^2. \quad (377)$$

Al derivar la ecuación anterior con respecto a c se encuentra que $1/c - V'(k) = 0$ y al definir $V(k) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln k$, $V'(k) = \alpha_1/k$ y $V''(k) = -\alpha_1/k^2$, se obtiene que $c = k/\alpha_1$. Dado todo lo anterior, se puede reescribir (377) como:

$$0 = \ln k (1 - \rho \alpha_1) - \ln \alpha_1 - \rho \alpha_0 + \alpha_1 \mu_a - 1 - \frac{1}{2} \alpha_1 \sigma_a^2. \quad (378)$$

Si se establece que $(1 - \rho\alpha_1) = 0$, entonces:

$$0 = \ln \rho - \rho\alpha_0 + \frac{\mu_a}{\rho} - \frac{\sigma_a^2}{2\rho} - 1. \quad (379)$$

Con las condiciones determinadas hasta aquí, los siguientes niveles óptimos de equilibrio se pueden caracterizar:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\rho}, \quad (380)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{\mu_a}{\rho} - \frac{\sigma_a^2}{2\rho} \right), \quad (381)$$

$$k = k_0 e^{(\mu_a - \rho - \frac{1}{2}\sigma_a^2)t + \sigma_a W_t}, \quad (382)$$

$$c = \rho k_0 e^{(\mu_a - \rho - \frac{1}{2}\sigma_a^2)t + \sigma_a W_t}. \quad (383)$$

Se puede apreciar que la trayectoria óptima del capital depende del capital inicial, k_0 , mientras que la trayectoria óptima del consumo lo hace de la tasa subjetiva de descuento y del capital inicial. Las ecuaciones (382) y (383) muestran que la tasa de crecimiento de la economía es:

$$\psi = \mu_a - \rho - \frac{1}{2}\sigma_a^2 + \sigma_a \xi, \quad (388)$$

en donde $\xi = W_t$ y $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Evidentemente, la economía depende de la innovación tecnológica realizada y en promedio crecerá si $\mu_a + \sigma_a \xi > -\rho - \frac{1}{2}\sigma_a^2$. Es deseable que la volatilidad sea muy pequeña ya que tiene un impacto negativo sobre el crecimiento, lo que significa que los cambios tecnológicos deben mantener un comportamiento constante y estable.

En consecuencia, tanto sector público como privado deben destinar recursos y esfuerzos constantes para alcanzar dicho objetivo. Al tomar en cuenta que:

$$\mathcal{V} = E \left\{ \int_t^\infty \ln c e^{-\rho t} ds \middle| \mathcal{F}_t \right\} = \mathcal{J}(k, t) = V(k) e^{-\rho t} = (\alpha_0 + \alpha_1 \ln k) e^{-\rho t}, \quad (389)$$

y si se sustituyen las ecuaciones (380) y (381) en dicha ecuación, entonces la función de utilidad indirecta al tiempo t es:

$$J(k, t) = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{\mu_a}{\rho} - \frac{\sigma_a^2}{2\rho} + \ln k \right) e^{-\rho t}. \quad (390)$$

Si se evalúa la función de utilidad indirecta al tiempo $t = 0$, entonces podemos verificar el impacto que dicha evolución tecnológica sobre el bienestar de los hogares, en cuyo caso se tiene:

$$W = J(k, 0) = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{\mu_a}{\rho} - \frac{\sigma_a^2}{2\rho} \right) + \frac{1}{\rho} k_0, \quad (391)$$

y al tomar las derivadas parciales del bienestar económico con respecto a la evolución tecnológica promedio y con respecto a su volatilidad se encuentra que:

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_a} = \frac{1}{\rho^2} > 0. \quad (392)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_a} = -\frac{\sigma_a}{\rho^2} < 0. \quad (393)$$

Lo anterior confirma que la volatilidad inherente al proceso de cambio tecnológico tiene un efecto negativo en el bienestar de los hogares, al igual que en el crecimiento de la economía.

En resumen, el presente modelo muestra que si el nivel tecnológico de la economía evoluciona de manera estocástica, es decir, siguiendo un movimiento geométrico browniano caracterizado por los procesos de innovación públicos y privados, entonces la tasa de crecimiento depende de manera positiva de la evolución promedio y de manera negativa de la volatilidad inherente al cambio tecnológico. Ahora bien, el siguiente apartado analiza el mismo comportamiento del nivel tecnológico de la economía en términos del gasto de gobierno destinado al cambio tecnológico.

4.3. El gasto de gobierno bajo incertidumbre

Con los mismos supuestos especificados en el apartado anterior y bajo las condiciones de producción establecidas por la siguiente ecuación:

$$dy = Ak, \quad (394)$$

se introduce ahora el gasto de gobierno. Suponga que el nivel tecnológico A presenta una dinámica, determinada por un movimiento geométrico browniano, en función de la participación del gobierno en las actividades económicas a través de un gasto destinado a modificar dicho nivel tecnológico. En consecuencia se tiene:

$$dR_g = \frac{dA}{A} = g dt + \hat{g} dz, \quad (395)$$

en donde g es el gasto instantáneo esperado, $\hat{g}$ representa la volatilidad asociada a dicho gasto y dz es una variable aleatoria que se distribuye de manera normal con media cero y varianza $\hat{g}^2 dt$. Si los individuos desempeñan los papeles de consumidor y productor de manera simultánea en la economía, entonces la restricción presupuestal del agente representativo es:

$$dk = k dR_g - c dt. \quad (396)$$

Cuando se sustituye la ecuación (395) en (396) la acumulación del capital queda determinada por la siguiente ecuación diferencial lineal estocástica homogénea:

$$dk = k \left(g - \frac{c}{k} \right) dt + k \hat{g} dz. \quad (397)$$

Análogamente, el valor esperado de la función de utilidad correspondiente al consumidor representativo sigue dada por (375) y la función de utilidad von Neumann-Morgenstern separable al tiempo $t = 0$ es:

$$v_0 = E \left\{ \int_0^\infty \ln c e^{-\rho t} ds \middle| \mathcal{F}_0 \right\}, \quad (398)$$

en donde $\mathcal{F}_0$ es la información inicial disponible para el consumidor. La condición *Hamilton-Jacobi-Bellman* que satisface el problema de control óptimo estocástico determinado por (375) y (398) es:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 \hat{g}^2. \quad (399)$$

De manera similar, la derivada de (399) con respecto a c muestra que $1/c - V'(k) = 0$, si se define $V(k) = \delta_0 + \delta_1 \ln k$, entonces $V'(k) = \delta_1/k$ y $V''(k) = -\delta_1/k^2$, por lo que se obtiene que $c = k/\delta_1$. En consecuencia la ecuación (399) se reescribe como:

$$0 = \ln k (1 - \rho\delta_1) - \ln \delta_1 - \rho\delta_0 + \delta_1 g - 1 - \frac{1}{2} \delta_1 \hat{g}^2. \quad (400)$$

Si se supone que $(1 - \rho\delta_1) = 0$, entonces:

$$0 = \ln \rho - \rho\delta_0 + \frac{g}{\rho} - \frac{\hat{g}^2}{2\rho} - 1. \quad (401)$$

Por lo tanto, las siguientes condiciones de equilibrio se pueden establecer:

$$\delta_1 = \frac{1}{\rho}, \quad (402)$$

$$\delta_0 = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{g}{\rho} - \frac{\hat{g}^2}{2\rho} \right), \quad (403)$$

$$k = k_0 e^{(g - \rho - \frac{1}{2}\hat{g}^2)t + \hat{g}Z_t}, \quad (404)$$

$$c = \rho k_0 e^{(g - \rho - \frac{1}{2}\hat{g}^2)t + \hat{g}Z_t}. \quad (405)$$

Nótese que las trayectorias óptimas o de equilibrio del capital y el consumo siguen dependiendo de los parámetros indicados en el apartado anterior, pero con una tasa de crecimiento diferente. Dicha tasa de crecimiento es:

$$\psi = g - \rho - \frac{1}{2}\hat{g}^2 + \hat{g}\xi, \quad (406)$$

en donde ahora $\xi = Z_t$ y $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Una vez más, la economía en promedio crecerá si $g + \hat{g}\xi > -\rho - \frac{1}{2}\hat{g}^2$. La ecuación (406) muestra que, cuando la dinámica del nivel

tecnológico está dada sólo por la participación del gobierno en función de un gasto destinado a la generación de nuevas tecnologías, la tasa de crecimiento económico depende de manera positiva del gasto medio esperado y de manera negativa de la volatilidad en dicho gasto. Lo que significa que una política pública inestable, en el sentido de modificaciones continuas al presupuesto destinado al progreso tecnológico, genera efectos negativos. Por otro lado, se tiene:

$$V = E \left\{ \int_t^\infty \ln c e^{-\rho t} ds \middle| \mathcal{F}_t \right\} = J(k, t) = V(k) e^{-\rho t} = (\delta_0 + \delta_1 \ln k) e^{-\rho t}, \quad (407)$$

y al sustituir (402) y (403) en la misma, se tiene la función de utilidad indirecta o ecuación del bienestar económico, al tiempo $t = 0$ siguiente:

$$W = J(k, 0) = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{g}{\rho} - \frac{\hat{g}^2}{2\rho} + k_0 \right). \quad (408)$$

Por medio de un análisis de estática comparativa se puede establecer que incrementos en el gasto esperado de gobierno tienen un impacto positivo en el bienestar económico de los hogares. Por su parte, un aumento en la volatilidad de dicho gasto genera una caída en el bienestar económico. Anterior se verifica gracias a que:

$$\frac{\partial W}{\partial g} = \frac{1}{\rho^2} > 0, \quad (409)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \hat{g}} = -\frac{\hat{g}}{\rho^2} < 0. \quad (410)$$

Por lo tanto, el modelo aquí analizado muestra que la participación del gobierno en la generación del cambio tecnológico, en una economía con ambientes cambiantes o de incertidumbre, genera impactos positivos en la tasa de crecimiento y en el bienestar de los hogares.

Para corroborar que los resultados encontrados en el capítulo 3, respecto al gasto de gobierno destinado a la generación de nuevas tecnologías y su efecto positivos sobre crecimiento y bienestar, se mantienen en modelos estocásticos al utilizar la

especificación usada en los modelos deterministas (véase ecuación número 15), a continuación se desarrolla un modelo en donde el gasto de gobierno afecta de manera directa al producto marginal del capital.

4.4. El gobierno y el cambio tecnológico

En la economía viven agentes que se preocupan por su descendencia, es decir, por sus hijos, los hijos de sus hijos y así sin un final y además presentan dotaciones iniciales idénticas. Estos agentes obtienen utilidad debido al consumo de un bien perecedero de acuerdo al valor esperado de la siguiente función de felicidad:

$$E \int_0^{\infty} u(c) e^{-\rho t} dt. \quad (411)$$

Esta especificación cumple con la ley de rendimientos marginales decrecientes. Al suponer una utilidad de la forma $u(c) = \ln c$ para el consumidor, se puede obtener su función de utilidad von Neumann-Morgenstern separable al tiempo $t = 0$ siguiente:

$$V_0 = E \left\{ \int_0^{\infty} \ln c e^{-\rho t} ds \middle| \mathcal{F}_0 \right\}, \quad (412)$$

en donde $\mathcal{F}_0$ es la información inicial disponible para el consumidor . Asimismo, los individuos también toman decisiones de producción bajo las siguientes condiciones:

$$dy = AGk, \quad (413)$$

con A que mide el nivel tecnológico de la economía, G que es el gasto de gobierno destinado al cambio tecnológico y k que es el capital físico necesario para producir una unidad de producto y . Siguiendo con la especificación establecida en la ecuación (15) suponga que:

$$G = \frac{dg}{g} = \mu_g dt + \sigma_g dw. \quad (414)$$

En la ecuación anterior μ_g mide el gasto presupuestado esperado, σ_g mide los cambios instantáneos destinados a la generación de tecnología y dw es una variable aleatoria con media cero y varianza $\sigma_g dt$. De manera análoga a las condiciones establecidas en el capítulo 3 respecto al cambio tecnológico, para que a partir de (414) se de dicho cambio es necesario que $AG > A$, lo que implica que $G > 1$. Se sabe que la ecuación de acumulación del capital está medida por la siguiente ecuación diferencial lineal estocástica homogénea:

$$dk = AGk - c dt, \quad (415)$$

y al sustituir la ecuación (414) en (415) la restricción presupuestal se reescribe como:

$$dk = k \left(A\mu_g - \frac{c}{k} \right) dt + k\sigma_g dw. \quad (416)$$

Del problema de control óptimo estocástico dado por (412) y (416) se obtiene la siguiente condición *Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B)*:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(A\mu_g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 \sigma_g^2 A^2. \quad (417)$$

Suponga que $V(k) = \beta_0 + \beta_1 \ln k$, si se deriva la ecuación (417) con respecto a c se encuentran las siguientes condiciones:

$$1/c - V'(k) = 0, \quad (418)$$

$$V'(k) = \beta_1/k, \quad (419)$$

$$V''(k) = -\beta_1/k^2. \quad (420)$$

Cuando se sustituye (419) en (418) se obtiene:

$$c = k/\beta_1. \quad (421)$$

Por lo tanto, la condición *Hamilton-Jacobi-Bellman* se puede reescribir de la siguiente manera:

$$0 = \ln k (1 - \rho\beta_1) - \ln \beta_1 - \rho\beta_0 + \beta_1 A\mu_g - 1 - \frac{1}{2} \beta_1 \sigma_g^2 A^2. \quad (422)$$

Nótese que, a diferencia de las condiciones *H-J-B* establecidas en los dos apartados anteriores, la ecuación (422) aparece en función del nivel tecnológico de la economía medido por A . Cuando se establece que $(1 - \rho\beta_1) = 0$, entonces:

$$0 = \ln \rho - \rho\beta_0 + \frac{A\mu_g}{\rho} - \frac{\sigma_g^2 A^2}{2\rho} - 1. \quad (423)$$

Por lo tanto, se puede establecer el siguiente equilibrio macroeconómico:

$$\beta_1 = \frac{1}{\rho}, \quad (424)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{A\mu_g}{\rho} - \frac{\sigma_g^2 A^2}{2\rho} \right), \quad (425)$$

$$k = k_0 e^{(A\mu_g - \rho - \frac{1}{2}A^2\sigma_g^2)t + gW_t}, \quad (426)$$

$$c = \rho k_0 e^{(A\mu_g - \rho - \frac{1}{2}A^2\sigma_g^2)t + A\sigma_g W_t}, \quad (427)$$

$$\psi = A\mu_g - \rho - \frac{1}{2}A^2\sigma_g^2 + g\xi, \quad (428)$$

en donde $\xi = W_t$ y $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Como se aprecia, la trayectoria del capital depende sólo del capital inicial existente en la economía, mientras que la trayectoria óptima del consumo depende del parámetro de preferencias y del capital inicial. Por su parte, la tasa de crecimiento de la economía depende del gasto que el gobierno destine a la generación de nueva tecnología, del nivel tecnológico de la economía y las preferencias de los individuos. Para que la economía crecerá sólo si $A\mu_g + g\xi > -\rho - \frac{1}{2}A^2\sigma_g^2$, en caso contrario la economía decrecerá. Asimismo, la ecuación (428) muestra que el gasto esperado de gobierno tiene un efecto positivo sobre el crecimiento, por su parte, las modificaciones continuas en dicho gasto medidas por σ_g^2 tiene un efecto negativo sobre la tasa de crecimiento. Por lo tanto, es deseable tener siempre el mismo flujo de recursos orientados al cambio tecnológico. Lo anterior verifica los resultados obtenidos en el capítulo 3 en el sentido de que lo que importa es un gasto constante, para cada momento

t , destinado a la generación de nuevas tecnologías porque sólo así se consigue que la economía crezca a una tasa mayor. En resumen, el impacto positivo sobre el crecimiento debido a la participación del gobierno en las actividades económicas, a través de la generación de nuevas tecnologías, se verifica bajo condiciones de certidumbre y de incertidumbre.

Para analizar el impacto del gasto sobre el bienestar económico de los hogares, es necesario recordar que:

$$\mathcal{V} = E \left\{ \int_t^\infty \ln c e^{-\rho s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right\} = J(k, t) = V(k) e^{-\rho t} = (\beta_0 + \beta_1 \ln k) e^{-\rho t}. \quad (429)$$

Por lo que, cuando se sustituyen las ecuaciones (424) y (425) en (429) se obtiene la función de utilidad indirecta al tiempo t siguiente:

$$J(k, t) = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{A\mu_g}{\rho} - \frac{\sigma_g^2 A^2}{2\rho} + \ln k \right) e^{-\rho t}. \quad (430)$$

Equivalentemente, al evaluar en $t = 0$, se tiene:

$$\mathcal{W} = J(k, 0) = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{A\mu_g}{\rho} - \frac{\sigma_g^2 A^2}{2\rho} \right) + \frac{1}{\rho} k_0. \quad (431)$$

El siguiente ejercicio de estática comparativa nos permite mostrar que la participación del gobierno a través del gasto esperado tiene un efecto positivo sobre el bienestar, como se parecía en (432), mientras que cambios drásticos instantáneos en dicho gasto tiene un impacto negativo, véase (433).

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mu_g} = \frac{A}{\rho^2} > 0. \quad (432)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \sigma_a} = -2 \frac{\sigma_g A^2}{\rho^2} < 0. \quad (433)$$

En consecuencia, hasta esta parte de la presente investigación, se ha mostrado que el gobierno puede y debe intervenir en las actividades de innovación y desarrollo tecnológico, sobre todo cuando el sector privado no lleva a cabo dichas actividades, ya

que contribuye de manera positiva a que la economía crezca a un mayor ritmo. A su vez, en el apartado 4.1 se mostró que cuando el sector público y el sector privado realizan actividades que generan un cambio en las condiciones de producción de manera conjunta, la tasa de crecimiento es mayor que cuando no existe dicho cambio por parte de ninguno de ambos sectores y también es mayor cuando sólo el gobierno lo realiza.

En el siguiente apartado se plantea ya una microfundamentación más profunda respecto al proceso del cambio tecnológico con el objetivo de explicar cómo es que dicho cambio sucede.

4.5. La función de innovación de la economía

En la introducción se mostró que los países desarrollados habían estado creciendo a una tasa mayor que los países en vías de desarrollo, sobre todo los países de Europa y en específico Suecia y Finlandia. Estos países tienen la característica, al igual que muchos otros como Estados Unidos, de tener laboratorios patrocinados por recursos del presupuesto gubernamental en donde se realizan actividades de investigación, generación y desarrollo tecnológico, tanto teórico como práctico. Del lado del sector público es precisamente ahí en donde el cambio tecnológico ocurre vía el gobierno, como ya se mencionaba al inicio un ejemplo lo encontramos en la NASA.

Pero dicho cambio no ocurre de la nada, sucede gracias a la información que está disponible al interior de dichos laboratorios y con base en esa información los científicos idean nuevas propuestas para una nueva tecnología, en función de herramientas, planos, o teorías que en general surgen debido a dichas propuestas. Significa que existe un conjunto de conocimiento previo que permite sentar las bases para su expansión en términos de nuevas ideas.

La literatura de especialidad respecto a la introducción de las ideas dentro de la teoría económica surge a partir de los años sesentas con Kuznets (1960), que introduce por primera vez la noción de un vínculo entre las ideas, la población y el crecimiento económico. Asimismo, Boserup (1965) enfatiza que la adopción de nuevas tecnologías se da gracias al crecimiento de la población.

La introducción de las ideas al análisis en la teoría del crecimiento neoclásico genera un problema respecto al supuesto de rendimientos constantes a escala, abordado ya en la sección 2.7 de esta investigación, y por ende respecto al equilibrio competitivo de los modelos neoclásicos del crecimiento, como lo muestran Arrow (1962b) y Shell (1966). De igual forma, Phleps (1966) y Nordhaus (1969) realizaron desarrollos teóricos que respecto a la no rivalidad del conocimiento y de cómo ésta conduce a rendimiento crecientes a escala. En términos de competencia imperfecta Spence (1976) y Dixit y Stiglitz (1977) hicieron estudios con la introducción de las ideas en el campo de la economía. Pero fueron Romer (1986, 1987, 1990a), Aghion y Howitt (1992) y Grossman y Helpman (1991) los que delimitaron de manera clara la relación entre ideas y crecimiento económico.

Todos estos planteamientos se basan en el supuesto de que la información disponible en la economía es no rival, es decir, está disponible para todos y en todo momento sin costo de adquisición o reproducción para el caso de los planos, manuales o cualquier impreso. Lo anterior conduce a rendimientos crecientes a escala toda vez que, al ser la función de producción homogénea de grado uno, al duplicar los factores de la producción (incluido el stock de ideas), el producto aumenta en más del doble. Sin embargo, el gobierno puede tener o producir información que sea rival y/o potencialmente exclusiva, como ya se analizó en el aparato 1.2.6, de tal forma que se mantengan los rendimientos constantes a escala en los factores de la producción.

Precisamente está es la idea que se encuentra detrás de la explicación del proceso del cambio tecnológico propuesto a continuación.

Se consideran los mismos supuestos bases de la economía, es decir, agentes con vida infinita, economía cerrada y agentes que deciden satisfacer su máxima utilidad debido al consumo en función de:

$$V_0 = E \left\{ \int_0^{\infty} \ln c e^{-\rho t} ds \middle| \mathcal{F}_0 \right\}. \quad (434)$$

La forma de su restricción presupuestal en principio es la misma, es decir:

$$dk = kdA - cdt. \quad (435)$$

Sin embargo, la dinámica del nivel tecnológico de la economía es distinta ya que ahora el cambio tecnológico en la economía está determinado por las acciones que empresas y gobierno realizan, en el ámbito tecnológico, de la siguiente manera. Suponga que le gobierno posee un conjunto de información Ω (herramientas, manuales, planos, teorías, etc.) disponible en cada momento t sólo al interior de los laboratorios públicos. Es un tipo de conocimiento que no se encuentra en universidad ni bibliotecas ya que compone el conocimiento de frontera en estricto sentido. En consecuencia, el conjunto de información no está al alcance del sector privado, es decir, la información es rival o exclusiva.

Dicho conjunto de información se modifica en función del conocimiento nuevo generado a partir de las ideas y aportaciones de los científicos que trabajan al interior de los laboratorios, de tal forma que aumenta debido a los recursos que el mismo gobierno destina. Debido a lo anterior, las siguientes condiciones se cumplen:

$$\Omega'(t) > 0, \quad (436)$$

$$\Omega(0) = 0, \quad (437)$$

$$\Omega(\infty) = \infty. \quad (438)$$

Por lo tanto una primera parte del comportamiento tecnológico de la economía está dado por:

$$dG = \frac{dA_g}{A_g} = \Omega(gdt + \hat{g}dw), \quad (439)$$

en donde A_g mide el nivel tecnológico generado por el gobierno, g mide los esfuerzos esperados en términos de laboratorios, capital físico, capital humano, recursos monetarios, etc., $\hat{g}$ representa los cambios en dichos esfuerzos, es decir, entradas y salidas del capital humano, fuga de cerebros, inversiones o desinversiones al interior de los laboratorios, pérdidas de información, compra o descompostura de maquinaria y equipo, y/o modificaciones en el gasto, y dw es una variable aleatoria con media cero y varianza $\hat{g}^2 dt$. Análogamente suponga que el sector privado posee un conjunto de información Γ (herramientas, manuales, planos, teorías, etc.) disponible en cada momento t sólo en el sector privado. De la misma forma que para el sector público, el conjunto de conocimiento del sector privado aumenta en función de los esfuerzos y recursos que se destinan para la innovación por parte de las empresas. Análogamente se cumple que:

$$\Gamma'(t) > 0, \quad (440)$$

$$\Gamma(0) = 0, \quad (441)$$

$$\Gamma(\infty) = \infty. \quad (442)$$

Lo que implica que la segunda parte de la evolución tecnológica de la economía está determinada por:

$$dE = \frac{dA_e}{A_e} = \Gamma(edt + \hat{e}du), \quad (443)$$

en donde A_e mide el nivel tecnológico generado por empresas, e son los recursos esperados destinados a la generación de nuevas tecnologías, $\hat{e}$ mide las modificaciones a dicho monto de recursos y du es otra variable aleatoria con media cero y varianza $\hat{e}^2 dt$.

Se supone que ambas variables aleatorias no están correlacionadas. Por lo tanto, la dinámica del nivel tecnológico sigue:

$$dA = dG + dE. \quad (444)$$

Al sustituir (439) y (443) en (444) se obtiene que:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dA_g}{A_g} + \frac{dA_e}{A_e}. \quad (445)$$

Equivalentemente,

$$dA = \Omega(gdt + \hat{g}dw) + \Gamma(edt + \hat{e}du). \quad (446)$$

Es importante señalar que $\Omega \neq \Gamma$ y que $Y = \Omega + \Gamma$ es el conocimiento total disponible en la economía. Cuando se sustituye la ecuación (446) en (435) y se simplifica se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal estocástica homogénea que mide la acumulación del capital:

$$dk = k(\Omega g + \Gamma e)dt + k(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})dz. \quad (447)$$

La ecuación *Hamilton-Jacobi-Bellman* correspondiente al problema de control óptimo estocástico establecido por (434) y (447) es:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(\Omega g + \Gamma e - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 (\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2. \quad (448)$$

Para poder solucionar la ecuación anterior se propone que $V(k) = \gamma_0 + \gamma_1 \ln k$, y al derivar dicha ecuación con respecto al consumo se encuentra que:

$$1/c - V'(k) = 0, \quad (449)$$

$$V'(k) = \gamma_1/k, \quad (450)$$

$$V''(k) = -\gamma_1/k^2. \quad (451)$$

$$c = k/\gamma_1. \quad (452)$$

Se sustituyen las condiciones anteriores en (448) y se reescribe la condición (*H-J-B*):

$$0 = \ln k (1 - \rho\gamma_1) - \ln \gamma_1 - \rho\gamma_0 + \gamma_1(\Omega g + \Gamma e) - 1 - \frac{1}{2} \gamma_1 (\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2. \quad (453)$$

Nótese que se puede establecer lo siguiente:

$$I = (\Omega g + \Gamma e), \quad (454)$$

$$\hat{I} = (\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2. \quad (455)$$

La ecuación (454) es lo que denomino la Función de Innovación de la parte determinista de la economía, mientras que la ecuación (455) es la Función de Innovación de la parte estocástica de la economía. Se puede apreciar que la innovación tecnológica está en función del conocimiento total disponible en la economía y de los esfuerzos públicos y privados que se hacen para la generación de nuevas tecnologías. Si $(1 - \rho\gamma_1) = 0$, entonces:

$$0 = \ln \rho - \rho\gamma_0 + \frac{I}{\rho} - \frac{\hat{I}}{2\rho} - 1. \quad (456)$$

El equilibrio macroeconómico, por lo tanto, es:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\rho}, \quad (457)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{I}{\rho} - \frac{\hat{I}}{2\rho} \right), \quad (458)$$

$$k = k_0 e^{(I - \rho - \frac{1}{2}\hat{I})t + IZ_t}, \quad (459)$$

$$c = \rho k_0 e^{(I - \rho - \frac{1}{2}\hat{I})t + IZ_t}, \quad (460)$$

$$\psi = I - \rho - \frac{I}{2} + I\xi, \quad (461)$$

en donde $\xi = Z_t$ y $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Es importante señalar que el equilibrio depende de la innovación realizada los sectores público y privado medida por la Función de Innovación I . El impacto que tiene la innovación sobre el crecimiento económico es positivo, por lo tanto, la participación de empresas y gobierno en las actividades de innovación y desarrollo es necesaria para logra una senda de crecimiento mayor. Bajo

estas condiciones, la economía crecerá sólo si $I + I\xi > -\rho - \frac{1}{2}\hat{I}$, en caso contrario la economía decrecerá.

Estos resultados coinciden con los establecidos en el capítulo anterior, en el sentido de que esfuerzos constantes en materia de investigación y desarrollo son de vital importancia para fomentar ritmos de crecimiento mayores. Otro resultado importante se encuentra en el hecho de que la tasa de crecimiento de la economía depende del ritmo al cual se incrementen los conjuntos de información disponibles en la economía.

Analicemos ahora el impacto que tiene la Función de Innovación sobre el bienestar, para ello recuerde que:

$$V = E \left\{ \int_t^\infty \ln c e^{-\rho s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right\} = J(k, t) = V(k) e^{-\rho t} = (\gamma_0 + \gamma_1 \ln k) e^{-\rho t}, \quad (462)$$

al sustituir (457) y (458) se llega a:

$$J(k, t) = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{I}{\rho} - \frac{\hat{I}}{2\rho} \right) e^{-\rho t} + \frac{1}{\rho} \ln k e^{-\rho t}. \quad (463)$$

Si se evalúa (463) en $t = 0$ y se sustituyen (454) y (455), entonces se encuentra la función de utilidad indirecta que mide el bienestar económico de los hogares siguiente:

$$\mathcal{W} = J(k, 0) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{(\Omega g + \Gamma e)}{\rho} - \frac{(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2}{2\rho} \right) + \frac{1}{\rho} (\ln \rho - 1 + k_0). \quad (464)$$

Como a lo largo de toda esta investigación se ha enfatizado que, los determinantes principales del crecimiento económico son los recursos constantes que se destinan a la generación de nuevas tecnologías por parte de ambos sectores, en consecuencia se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} = \frac{\Omega}{\rho^2} > 0, \quad (465)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial e} = \frac{\Gamma}{\rho^2} > 0. \quad (466)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \Omega} = \frac{g}{\rho^2} > 0, \quad (467)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \Gamma} = \frac{e}{\rho^2} > 0. \quad (468)$$

Por lo tanto, el impacto sobre el bienestar económico de los hogares, debido a incrementos en el gasto de gobierno y en el gasto empresarial destinados a la investigación y desarrollo tecnológicos, es positivo. Por su parte, un conjunto de conocimiento mayor, tanto a nivel público como privado, incrementa el bienestar económico.

4.6. Los saltos en el conjunto de conocimiento gubernamental

Una vez más, dado que el individuo desea maximizar su utilidad intertemporal en función de:

$$\mathcal{V}_0 = E \left\{ \int_0^\infty \ln c e^{-\rho t} ds \middle| \mathcal{F}_0 \right\}, \quad (469)$$

y como además de tomar decisiones de consumo también toma decisiones de producción, al interior de una economía cerrada, en consecuencia su flujo de recursos está determinado por:

$$dk = kdA - cdt. \quad (470)$$

Ahora la dinámica en el coeficiente tecnológico está en función del conjunto de conocimiento disponible para el gobierno que se mueve de acuerdo a un proceso de difusión con saltos, es decir:

$$dA = \Omega(gdt + \hat{g}dw + \bar{\bar{g}}dq), \quad (471)$$

en donde g es el gasto de gobierno medio esperado en términos monetarios, de capital humano, maquinaria o equipo, laboratorios e infraestructura, etc., $\hat{g}$ mide las modificaciones en dicho gasto como pueden ser la volatilidad en el gasto monetario, la

fuga de cerebros, la pérdida de información, compra o venta de maquinaria o equipo, etc. Asimismo, $\bar{g}$ es la media esperada del salto en el conjunto de conocimiento, Ω , ocasionado por una innovación radical realizada al interior de los laboratorios públicos en función de la información disponible por el gobierno y el capital humano, o por un incremento fuerte en el gasto monetario destinado. Bajo estas condiciones, las innovaciones radicales sólo pueden suceder al interior de los laboratorios públicos debido a que es sólo el gobierno el que posee información de punta, de frontera o avanzada (conjunto de conocimiento Ω), tal que le permite realizar actividades de generación tecnológica más avanzadas. Por último, dw es un proceso de Wiener, es decir, una variable aleatoria normal con incrementos temporales independientes, media cero y varianza igual al incremento temporal. El número de innovaciones radicales por unidad de tiempo ocurre de acuerdo a un proceso de Poisson (dq) con intensidad θ de manera que:

$$\begin{cases} \Pr(\text{un salto durante } dt) = \Pr(dq = 1) = \theta dt, & (472) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pr(\text{ningun salto durante } dt) = \Pr(dq = 0) = 1 - \theta dt + o(dt), & (473) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pr(\text{más de un salto durante } dt) = \Pr(dq > 1) = o(dt). & (474) \end{cases}$$

De manera adicional, se supone que dw y dq no están correlacionados, que $q_0 = 0$ y que:

$$\frac{o(dt)}{t} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0. \quad (475)$$

Al sustituir (471) en (470) se encuentra la ecuación diferencial lineal estocástica homogénea que mide la acumulación del capital del productor representativo, es decir:

$$dk = k \left(\Omega g - \frac{c}{k} \right) dt + \Omega k \hat{g} dw + \Omega k \bar{g} dq. \quad (476)$$

El problema de control óptimo estocástico determinado por (469) y (476) da como resultado la siguiente ecuación *Hamilton-Jacobi-Bellman*:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + V'(k)k \left(\Omega g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 (\Omega \hat{g})^2 + \{V[\Omega k(1 + \bar{g})] - V(k)\} dq. \quad (477)$$

Si se propone $V(k) = \beta_0 + \beta_1 \ln k$ para encontrar la solución de (477), entonces se puede derivar dicha ecuación con respecto al consumo y al tiempo encontrando que:

$$1/c - V'(k) = 0, \quad (478)$$

$$V'(k) = \beta_1/k, \quad (479)$$

$$V''(k) = -\beta_1/k^2. \quad (480)$$

$$c = k/\beta_1. \quad (481)$$

Al sustituir las condiciones establecidas (472) y (478)-(481) en (477), se puede reescribir la condición *Hamilton-Jacobi-Bellman* de la forma:

$$0 = \ln k (1 - \rho\beta_1) - \ln \beta_1 - \rho\beta_0 + \beta_1 \Omega g - 1 - \frac{1}{2} \beta_1 (\Omega \hat{g})^2 + [\beta_1 \ln \Omega (1 + \bar{g})] \theta. \quad (482)$$

Suponga que $(1 - \rho\beta_1) = 0$, por lo tanto significa que:

$$0 = \ln \rho - \rho\beta_0 + \frac{\Omega g}{\rho} - \frac{(\Omega \hat{g})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega (1 + \bar{g}) \right] \theta. \quad (483)$$

En consecuencia, el equilibrio macroeconómico está determinado por:

$$\beta_1 = \frac{1}{\rho}, \quad (484)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\rho} \left\{ \ln \rho + \frac{\Omega g}{\rho} - \frac{(\Omega \hat{g})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega (1 + \bar{g}) \right] \theta \right\}, \quad (485)$$

$$k = k_0 e^{(\Omega g + \Omega \theta \bar{g} - \rho - \frac{1}{2} (\Omega \hat{g})^2) t + \Omega g W_t}, \quad (486)$$

$$c = \rho k_0 e^{(\Omega g + \Omega \theta \bar{g} - \rho - \frac{1}{2} (\Omega \hat{g})^2) t + \Omega g W_t}, \quad (487)$$

$$\psi = \Omega g + \Omega \theta \bar{g} - \rho - \frac{1}{2} (\Omega \hat{g})^2 + \Omega g \xi, \quad (488)$$

$$\psi = \Omega \left(g + \theta \bar{g} + g \xi - \frac{\Omega \hat{g}^2}{2} \right) - \rho, \quad (488')$$

en donde $\xi = W_t$ y $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dicho equilibrio muestra que la participación del gobierno en la generación de nueva tecnología a través de un gasto medio esperado y por medio de innovaciones radicales o incrementos fuertes en dicho gasto, tiene un impacto positivo mientras que las modificaciones en dicho gasto medidas por medio de la volatilidad asociada que representa la entrada y salida de cerebros, información, maquinaria y equipo, etc., presenta un efecto negativo. Por su parte, la tasa de crecimiento económico depende de la evolución del conocimiento gubernamental en función del gasto de gobierno. A mayor gasto de gobierno, o saltos generados en el mismo, mayor será el crecimiento económico. La ecuación (488) muestra que la economía sólo crecerá si $\Omega(\dot{g} + \theta \bar{g} + g\xi) > -\rho - \frac{1}{2}(\Omega \hat{g})^2$.

Asimismo, la participación del gobierno en las actividades económicas a través de la generación de nuevas condiciones tecnológicas en la economía tiene un efecto positivo en el bienestar económico de los hogares, dicho efecto se puede corroborar al obtener la función del bienestar económico. Para ello, es necesario recordar que:

$$\mathcal{V} = E \left\{ \int_t^\infty \ln c e^{-\rho t} ds \middle| \mathcal{F}_t \right\} = J(k, t) = V(k) e^{-\rho t} = (\beta_0 + \beta_1 \ln k) e^{-\rho t}, \quad (489)$$

y cuando se sustituye (484) y (485) en (489) se obtiene:

$$J(k, t) = \frac{1}{\rho} \left\{ \ln \rho + \frac{\Omega g}{\rho} - \frac{(\Omega \hat{g})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega (1 + \bar{g}) \right] \theta + \frac{1}{\rho} \ln k \right\} e^{-\rho t}. \quad (490)$$

Equivalentemente, cuando $t = 0$:

$$\mathcal{W} = J(k, 0) = \frac{1}{\rho} \left\{ \ln \rho + \frac{\Omega g}{\rho} - \frac{(\Omega \hat{g})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega (1 + \bar{g}) \right] \theta + \frac{1}{\rho} k_0 \right\}. \quad (491)$$

Un ejercicio simple de estática comparativa muestra el impacto positivo del gasto medio esperado y de las innovaciones radicales realizadas, y también muestra el impacto negativo debido a las modificaciones ya comentadas en dicho gasto, ambos sobre el bienestar económico:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} = \frac{\Omega}{\rho^2} > 0, \quad (492)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \hat{g}} = -\frac{\Omega^2 \hat{g}}{\rho^2} < 0, \quad (493)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{g}} = \frac{\theta}{(1 + \bar{g})\rho^2} > 0. \quad (494)$$

En resumen, el modelo aquí desarrollado mostró que cuando el gobierno destina recursos hacia la generación de nuevas tecnologías a través de un gasto, el cual sigue una dinámica dada por un proceso de difusión con saltos, la tasa de crecimiento económico es mayor que en ausencia del mismo. El equilibrio macroeconómico depende de los esfuerzos del gobierno en materia tecnológica, en especial cuando el gobierno realiza innovaciones radicales.

4.7. Innovación radical e incremental

En el apartado anterior se desarrolló un modelo en donde el cambio tecnológico en la economía estaba determinado por las acciones del gobierno en materia de generación tecnológica. En específico, la participación del gobierno estaba caracterizada, además del gasto medio esperado y de su volatilidad, por saltos en los esfuerzos del gobierno que pueden ser explicados como innovaciones radicales. Dichas innovaciones radicales ocurren sólo al interior del aparato gubernamental porque es ahí en donde se realiza la investigación de punta, es ahí en donde existe el conocimiento de frontera. En otras palabras, el gobierno es el único que posee información avanzada (conjunto de conocimiento Ω) tal que le permite obtener saltos cualitativos importantes en el nivel tecnológico. Significa entonces que las innovaciones radicales sólo pueden suceder por causa del gobierno.

Por su parte, cuando la empresa realiza actividades de investigación y desarrollo tecnológico sólo pueden producir innovaciones incrementales debido a que el conjunto de información que ésta posee no contiene datos avanzados, en consecuencia saltos cualitativos en el conjunto de información privado que modifiquen la dinámica del coeficiente tecnológico de la economía no son posibles. Bajo estas hipótesis, la dinámica del nivel tecnológico de la economía depende de las actividades tanto del sector público como del sector privado.

Si el individuo desea maximizar su utilidad intertemporal dada por:

$$V_0 = E \left\{ \int_0^\infty \ln c e^{-\rho t} ds \middle| \mathcal{F}_0 \right\}, \quad (495)$$

y su flujo de recursos está determinado por:

$$dk = k dA - c dt, \quad (496)$$

entonces, al incorporar la participación del sector público y del sector privado al proceso de innovación tecnológica en la economía bajo la forma:

$$dA = \Omega(\bar{g} dq) + \Gamma(edt + \hat{e} dw), \quad (497)$$

la restricción presupuestal del individuo representativo es:

$$dk = k \left(\Gamma e - \frac{c}{k} \right) dt + \Gamma k \hat{e} dw + \Omega k \bar{g} dq. \quad (498)$$

Bajo estas condiciones, Γ representa el conjunto de información de la empresa representativa, e la inversión empresarial media esperada en términos monetarios, de capital humano, maquinaria o equipo, etc., que se destina para las actividades de investigación y desarrollo tecnológico. Asimismo, $\hat{e}$ mide las modificaciones en términos de la fuga de cerebros, la pérdida de información, compra o venta de maquinaria o equipo, etc., o la volatilidad correspondiente a dicha inversión en términos monetarios.

Este proceso de difusión que caracteriza por una parte a la dinámica del coeficiente tecnológico representa a las innovaciones incrementales. Por último, $\bar{g}$ es la media esperada del salto, en el conjunto de conocimiento gubernamental, ocasionado por una innovación radical realizada al interior de los laboratorios públicos en función de la información disponible por el gobierno y el capital humano, o por un incremento importante en el gasto monetario destinado. Por lo tanto, la otra parte que caracteriza a la dinámica del coeficiente tecnológico de la economía está dada por las innovaciones radicales.

Por otro lado, dw es un proceso de Wiener o una variable aleatoria normal con incrementos temporales independientes, media cero y varianza igual al incremento temporal, y dq es un proceso de Poisson que mide el número de innovaciones radicales por unidad de tiempo que ocurren con intensidad ω de manera que:

$$\begin{cases} \Pr(\text{un salto durante } dt) = \Pr(dq = 1) = \omega dt, & (499) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pr(\text{ningun salto durante } dt) = \Pr(dq = 0) = 1 - \omega dt + o(dt), & (500) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pr(\text{más de un salto durante } dt) = \Pr(dq > 1) = o(dt). & (501) \end{cases}$$

Suponga también que dw y dq no están correlacionados, que $q_0 = 0$ y que:

$$\frac{o(dt)}{t} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0. \quad (502)$$

El problema de control óptimo estocástico determinado por (495) y (498) da como resultado la siguiente ecuación *Hamilton-Jacobi-Bellman*:

$$\begin{aligned} 0 = \ln c - \rho V(k) + V'(k)k \left(\Gamma e - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k)k^2 (\Gamma \hat{e})^2 \\ + \{V[\Omega k(1 + \bar{g})] - V(k)\}dq. \end{aligned} \quad (503)$$

La propuesta como posible solución a la ecuación $V(k)$ es idéntica a la utilizada en los apartados previos, es decir, $V(k) = \beta_0 + \beta_1 \ln k$. Para encontrar la solución de (503), se derivar dicha ecuación con respecto al consumo y con respecto al tiempo y se sustituye la propuesta ya especificada, por lo que:

$$1/c - V'(k) = 0, \quad (504)$$

$$V'(k) = \beta_1/k, \quad (505)$$

$$V''(k) = -\beta_1/k^2. \quad (506)$$

$$c = k/\beta_1. \quad (507)$$

Al sustituir las condiciones establecidas por (499) y (504)-(507) en (503), y al simplificar, en consecuencia la condición *Hamilton-Jacobi-Bellman* se puede reescribir de la forma:

$$0 = \ln k (1 - \rho\beta_1) - \ln \beta_1 - \rho\beta_0 + \beta_1\Gamma e - 1 - \frac{1}{2}\beta_1(\Gamma\hat{e})^2 + [\beta_1 \ln \Omega(1 + \bar{g})]\omega. \quad (508)$$

Si se supone que $(1 - \rho\beta_1) = 0$, entonces:

$$0 = \ln \rho - \rho\beta_0 + \frac{\Gamma e}{\rho} - \frac{(\Gamma\hat{e})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega(1 + \bar{g}) \right] \omega. \quad (509)$$

Nótese que en esta economía la Función de Innovación, en su parte determinista, está determinada por el conjunto de conocimiento público y privado, la inversión media esperada y por la innovación radical representada por un salto de intensidad ω , es decir:

$$I = (\Gamma e + \Omega\omega\bar{g}). \quad (510)$$

En la parte estocástica, la Función de Innovación depende sólo de los esfuerzos privados destinados a la generación tecnológica, por lo que:

$$\hat{I} = \Gamma\hat{e}. \quad (511)$$

En consecuencia, el equilibrio macroeconómico está determinado por:

$$\beta_1 = \frac{1}{\rho}, \quad (512)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\rho} \left\{ \ln \rho + \frac{\Gamma e}{\rho} - \frac{(\Gamma\hat{e})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega(1 + \bar{g}) \right] \omega \right\}, \quad (513)$$

$$k = k_0 e^{(\Gamma e + \Omega\omega\bar{g} - \rho \frac{1}{2}(\Gamma\hat{e})^2)t + \Gamma e W_t}, \quad (514)$$

$$c = \rho k_0 e^{(\Gamma e + \Omega \omega \bar{g} - \rho - \frac{1}{2}(\Gamma \hat{e})^2)t + \Gamma e W_t}, \quad (515)$$

$$\psi = \Gamma e + \Omega \omega \bar{g} - \rho - \frac{1}{2}(\Gamma \hat{e})^2 + \Gamma e \xi, \quad (516)$$

en donde $\xi = W_t$ y $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Se puede ver que cuando empresa y gobierno destinan recursos hacia la generación del cambio tecnológico en la economía, la tasa de crecimiento económico en dicha economía es mayor que en ausencia de ambos sectores en estas actividades. En consecuencia, las trayectorias medias esperadas de las principales variables económicas son mayores. En particular, la tasa de crecimiento depende del conjunto de conocimiento total disponible en la economía, es decir, de aquel que poseen empresas y gobierno, también depende de las innovaciones incrementales y de las innovaciones radicales. La ecuación (516) muestra que la economía sólo crecerá si $\Gamma e + \Omega \omega \bar{g} + \Gamma e \xi > -\rho - \frac{1}{2}(\Gamma \hat{e})^2$.

Respecto a la participación del sector público y privado en las actividades económicas a través de la generación de nuevas condiciones tecnológicas en la economía, se puede mostrar que la participación media esperada tiene un efecto positivo en el bienestar económico de los hogares, mientras que la volatilidad inherente a esta participación tiene un impacto negativo. Lo anterior se verifica cuando se calculan las derivadas parciales de la función del bienestar económico respecto a los esfuerzos que destinan tanto empresas como gobierno en el cambio tecnológico. Por lo que se necesita recordar que:

$$\mathcal{V} = E \left\{ \int_t^\infty \ln c e^{-\rho s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right\} = J(k, t) = V(k) e^{-\rho t} = (\beta_0 + \beta_1 \ln k) e^{-\rho t}, \quad (517)$$

y cuando se sustituye (512) y (513) en (517) se obtiene:

$$J(k, t) = \frac{1}{\rho} \left\{ \ln \rho + \frac{\Gamma e}{\rho} - \frac{(\Gamma \hat{e})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega (1 + \bar{g}) \right] \omega + \frac{1}{\rho} \ln k \right\} e^{-\rho t}. \quad (518)$$

Equivalentemente, cuando $t = 0$:

$$\mathcal{W} = \mathcal{J}(k, 0) = \frac{1}{\rho} \left\{ \ln \rho + \frac{\Gamma e}{\rho} - \frac{(\Gamma \hat{e})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega (1 + \bar{g}) \right] \omega + \frac{1}{\rho} k_0 \right\}. \quad (519)$$

Por lo tanto, la derivada parcial del bienestar económico respecto a la inversión media esperada y respecto a la volatilidad de dicha inversión son:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial e} = \frac{\Gamma}{\rho^2} > 0, \quad (520)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \hat{e}} = -\frac{\Gamma^2 \hat{e}}{\rho^2} < 0. \quad (521)$$

Se puede apreciar que un incremento en la inversión media esperada aumenta el bienestar económico de los hogares, mientras que cambios sustanciales en dicha inversión conllevan un impacto negativo sobre el mismo. Por otra parte, la derivada parcial del bienestar con respecto a las innovaciones radicales es:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{g}} = \frac{\omega}{(1 + \bar{g})\rho^2} > 0. \quad (522)$$

Lo anterior significa que las innovaciones radicales realizadas por el gobierno tiene un efecto positivo sobre el bienestar económico de los hogares. En consecuencia, cuando el gobierno y las empresas participan de manera conjunta en la generación de nuevas condiciones tecnológicas, el bienestar económico de los agentes aumenta y la tasa de crecimiento económico es mayor, que cuando no existe dicha participación de ambos sectores.

4.8. El proceso de innovación en la economía

Hasta ahora se ha analizado fundamentalmente el papel del gobierno en las actividades de investigación y desarrollo tecnológico, al suponer que el gobierno destina recursos para la generación de nuevas tecnologías. En principio, los modelos anteriores han

incluido de manera parcial la participación del gobierno o la participación de la empresa en dichas actividades.

En este apartado se desarrolla el modelo completo, es decir, el que incluye a empresas y gobierno caracterizados por las innovaciones incrementales y radicales, respectivamente, dejando ver el proceso por el cual la innovación se lleva a cabo en la economía. Significa que el conjunto de conocimiento del cual depende el nivel tecnológico de la economía está determinado por las acciones públicas y privadas de acuerdo a las innovaciones incrementales y radicales que ocurren debido a las actividades de investigación y desarrollo que hacen ambos sectores.

En consecuencia, y siguiendo los supuestos de siempre, el individuo desea maximizar su utilidad intertemporal dada por:

$$V_0 = E \left\{ \int_0^{\infty} \ln c e^{-\rho t} ds \middle| \mathcal{F}_0 \right\}. \quad (523)$$

La restricción presupuestal del agente representativo es:

$$dk = kdA - cdt, \quad (524)$$

en donde dA representa la dinámica del nivel tecnológico existente en la economía en función de la participación de empresas y gobierno en las actividades de generación de tecnología, por lo que, dicha dinámica está determinada por:

$$dA = \Omega(gdt + \hat{g}dw + \bar{g}dq) + \Gamma(edt + \hat{e}du). \quad (525)$$

Es importante señalar que dw y du son dos variables aleatorias con media cero y varianza igual al incremento temporal independiente una de la otra. La ecuación anterior muestra la participación del sector público a través de un proceso de difusión con saltos, mientras que muestra la inclusión del sector privado sólo por medio de un proceso de difusión. Bajo estas hipótesis, al sustituir (525) en (524) y simplificar, la restricción presupuestal del individuo es:

$$dk = k \left(\Omega g + \Gamma e - \frac{c}{k} \right) dt + k(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e}) dz + k\Omega \bar{g} dq. \quad (526)$$

Dado que dw y du son independientes, dz es simplemente el proceso de Wiener que resulta debido a la factorización en (525), por lo que también es independiente. Por su parte, dq es un proceso de Poisson independiente de dz , es decir, sin correlación entre ambos y mide el número de saltos por unidad de tiempo que ocurren con intensidad λ , por lo que de manera análoga:

$$\begin{cases} \Pr(\text{un salto durante } dt) = \Pr(dq = 1) = \lambda dt, & (527) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pr(\text{ningun salto durante } dt) = \Pr(dq = 0) = 1 - \lambda dt + o(dt), & (528) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pr(\text{más de un salto durante } dt) = \Pr(dq > 1) = o(dt), & (529) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_0 = 0, & (530) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{o(dt)}{t} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0. & (531) \end{cases}$$

Por lo tanto, la Función de Innovación de la parte determinista de la economía depende del gasto de gobierno medio esperado, de la inversión media esperada, del conjunto de conocimiento de ambos sectores, y del salto en el nivel tecnológico generado por el gobierno, es decir:

$$I = (\Omega g + \Gamma e + \Omega \omega \bar{g}). \quad (532)$$

Por el otro lado, la Función de Innovación de la parte estocástica de la economía depende del conjunto de conocimiento y de las volatilidades asociadas a los esfuerzos medios esperados realizados en ambos sectores, por lo que:

$$\hat{I} = (\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e}). \quad (533)$$

La ecuación *Hamilton-Jacobi-Bellman* correspondiente al problema de control óptimo estocástico determinado por (523) y (526), y la propuesta de solución de $V(k)$ son respectivamente:

$$\begin{aligned} 0 = & \ln c - \rho V(k) + V'(k)k \left(\Omega g + \Gamma e - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k)k^2 (\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2 \\ & + \{V[\Omega k(1 + \bar{g})] - V(k)\}dq, \end{aligned} \quad (534)$$

$$V(k) = \beta_0 + \beta_1 \ln k. \quad (535)$$

Al derivar la ecuación (534) con respecto al consumo y al tiempo, igual a cero, y sustituir (535) en dichas derivadas, se obtiene:

$$1/c - V'(k) = 0, \quad (536)$$

$$V'(k) = \beta_1/k, \quad (537)$$

$$V''(k) = -\beta_1/k^2. \quad (538)$$

$$c = k/\beta_1. \quad (539)$$

Se sustituye (527) y (536)-(539) en (534) y se obtiene la condición *Hamilton-Jacobi-Bellman* en función de las principales variables económicas que caracterizan al cambio tecnológico en la economía, es decir:

$$0 = \ln k (1 - \rho\beta_1) - \ln \beta_1 - \rho\beta_0 + \beta_1(\Omega g + \Gamma e) - 1 - \frac{1}{2}\beta_1(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2 + [\beta_1 \ln \Omega (1 + \bar{g})]\lambda. \quad (540)$$

Si se supone que $(1 - \rho\beta_1) = 0$, entonces:

$$0 = \ln \rho - \rho\beta_0 + \frac{\Omega g}{\rho} + \frac{\Gamma e}{\rho} - \frac{(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega (1 + \bar{g}) \right] \lambda. \quad (541)$$

El equilibrio macroeconómico de la economía bajo las condiciones ya establecidas está determinado por las siguientes ecuaciones:

$$\beta_1 = \frac{1}{\rho}, \quad (542)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\rho} \left\{ \ln \rho + \frac{\Omega g}{\rho} + \frac{\Gamma e}{\rho} - \frac{(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega (1 + \bar{g}) \right] \omega \right\}, \quad (543)$$

$$k = k_0 \exp \left(\Omega g + \Gamma e + \Omega \lambda \bar{g} - \rho - \frac{1}{2}(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2 \right) t + (\Omega g + \Gamma e) W_t, \quad (544)$$

$$c = \rho k_0 \exp \left(\Omega g + \Gamma e + \Omega \lambda \bar{g} - \rho - \frac{1}{2}(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2 \right) t + (\Omega g + \Gamma e) W_t, \quad (545)$$

$$\psi = \left(\Omega g + \Gamma e + \Omega \lambda \bar{g} - \rho - \frac{1}{2}(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2 \right) t + (\Omega g + \Gamma e) \xi, \quad (546)$$

en donde $\xi = W_t$ y $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. El equilibrio macroeconómico depende de la Función de Innovación de la economía, es decir, de la participación en las actividades de investigación y desarrollo tecnológico de los sectores público y privado a través de sus esfuerzos monetarios, de capital humano o de infraestructura. Más todavía, dicha participación conjunta tiene un impacto positivo mayor sobre el crecimiento económico que cuando sólo uno de los sectores interviene en la generación de nueva tecnología. Evidentemente este impacto es mucho mayor que cuando ninguno de los sectores realiza actividades de investigación y desarrollo tecnológico. El crecimiento en esta economía sólo se garantiza cuando se cumple que:

$$\Omega g + \Gamma e + \Omega \lambda \bar{g} + (\Omega g + \Gamma e)\xi > -\rho - \frac{1}{2}(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2. \quad (547)$$

Equivalentemente,

$$I + (\Omega g + \Gamma e)\xi > -\rho - \frac{\hat{f}^2}{2}. \quad (548)$$

Asimismo, el hecho de que empresas y gobierno de manera conjunta participen en la generación de nuevas condiciones tecnológicas en la economía trae consigo un efecto positivo sobre el bienestar económico de los agentes. Para mostrarlo se obtiene la función del bienestar económico considerando que:

$$V = E \left\{ \int_t^\infty \ln c e^{-\rho s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right\} = J(k, t) = V(k) e^{-\rho t} = (\beta_0 + \beta_1 \ln k) e^{-\rho t}. \quad (549)$$

Al sustituir (542) y (543) en (549) y simplificar se obtiene:

$$J(k, t) = \frac{1}{\rho} \left\{ \ln \rho + \frac{\Omega g}{\rho} + \frac{\Gamma e}{\rho} - \frac{(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega (1 + \bar{g}) \right] \lambda + \frac{1}{\rho} \ln k \right\} e^{-\rho t}. \quad (550)$$

Cuando se evalúa la ecuación (550) en $t = 0$ se tiene:

$$\mathcal{W} = J(k, 0) = \frac{1}{\rho} \left\{ \ln \rho + \frac{\Omega g}{\rho} + \frac{\Gamma e}{\rho} - \frac{(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2}{2\rho} - 1 + \left[\frac{1}{\rho} \ln \Omega (1 + \bar{g}) \right] \lambda + \frac{1}{\rho} k_0 \right\}. \quad (551)$$

El siguiente ejercicio de estática comparativa permite mostrar que la participación de empresas y gobierno en la generación de nuevas condiciones tecnológicas tiene un efecto positivo sobre el bienestar económico de los hogares, a través de los esfuerzos medios esperados y un efecto negativo debido a las modificaciones sustanciales en dichos esfuerzos.

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial g} = \frac{\Omega}{\rho^2} > 0, \quad (552)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial e} = \frac{\Gamma}{\rho^2} > 0, \quad (553)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \hat{g}} = -\frac{\Omega^2 \hat{g} - \Omega \Gamma \hat{e}}{\rho} > 0, \quad (554)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \hat{e}} = -\frac{\Omega \Gamma \hat{g} - \Gamma^2 \hat{e}}{\rho} < 0. \quad (555)$$

Por lo tanto, incrementos en la inversión media esperada y en el gasto de gobierno medio esperado aumentan el bienestar económico de los hogares, mientras que cambios sustanciales en dicha inversión y en el gasto traen consigo un impacto negativo sobre el mismo. Respecto a las innovaciones radicales, saltos de mayor intensidad o un número mayor de saltos tienen un impacto positivo sobre el bienestar económico, ya que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{g}} = \frac{\lambda}{(1 + \bar{g})\rho^2} > 0. \quad (556)$$

En resumen, las innovaciones que realizan en la economía debido a las actividades de empresas y gobierno son positivas para la economía en su conjunto, por lo que políticas públicas y privadas encaminadas hacia este objetivo son deseables para mejorar el nivel de calidad de vida de los individuos.

4.9. Conclusiones generales respecto a la innovación pública y privada

En el presente capítulo se introdujo la participación de las empresas en las actividades de investigación y desarrollo tecnológico, y se profundizó los microfundamentos para explicar cómo es que se da dicho proceso de cambio en las condiciones tecnológicas. Inicialmente, se desarrolló un modelo en donde se mostró que cuando el sector público y el sector privado participan de manera conjunta, en la generación de nuevas tecnologías, la tasa de crecimiento económico es mayor que cuando sólo el gobierno participa. Asimismo, el bienestar económico de los hogares aumenta a medida que el gasto de gobierno y el capital humano aumentan.

Posteriormente, se dio una breve explicación acerca de la dinámica que puede tener el nivel tecnológico de la economía utilizando como característica principal del mismo un proceso de Wiener, mostrando bajo estas condiciones que las actividades tecnológicas medias esperadas tienen un efecto positivo sobre el crecimiento y el bienestar económico, mientras que las volatilidades inherentes a dicho fenómeno tiene un impacto negativo sobre tasa de crecimiento y bienestar. Una vez que se establecieron las condiciones estocásticas bajo las cuales se puede desempeñar una economía con dinámica en el nivel tecnológico, se introdujo el gasto de gobierno utilizando las mismas hipótesis que en el marco determinista, esto es, el gasto de gobierno incrementa el nivel tecnológico de la economía afectando así a la productividad marginal del capital. Los resultados encontrados coincidieron con los mostrados en el capítulo anterior, respecto a que si el gobierno destina recursos para la generación de nuevas condiciones tecnológicas en la economía, entonces la tasa de crecimiento económico es mayor y el bienestar económico de los hogares aumenta conforme dicho gasto aumenta.

Lo anterior permitió establecer las bases sobre las cuales se introdujeron nuevos microfundamentos que permitieron explicar el proceso bajo el cual se da el cambio tecnológico. Dicho cambio ocurre en función del conocimiento existente al interior de cada sector, en donde además, el conocimiento de un sector es totalmente diferente al del otro. Bajo estas condiciones, los esfuerzos medios esperados de los sectores público y privado modifican el nivel de conocimiento al interior de dichos sectores incrementándose o no de acuerdo al comportamiento inherente a estos esfuerzos, de manera tal que la dinámica del conjunto de conocimiento total en la economía está determinada por procesos de difusión y algunas veces con saltos. La dinámica en el nivel tecnológico de la economía está ligada a la dinámica de los conjuntos de conocimiento disponibles en ambos sectores, por lo que a medida que el conocimiento aumenta, el nivel tecnológico también lo hará.

En consecuencia, la tasa de crecimiento económico depende de la dinámica de los conjuntos de información determinada por el gasto de gobierno y la inversión privada destinados a la generación de nuevas condiciones tecnológicas. Análogamente, el bienestar económico de los hogares está en función de estas mismas condiciones, por lo que aumentos sistemáticos en los esfuerzos medios esperados públicos y privados permiten aumentar el bienestar económico de los hogares. Por lo tanto, la segunda pregunta de investigación ¿Cuál es el efecto que tiene el cambio tecnológico generado tanto por la empresa como por el gobierno sobre el crecimiento económico? se pudo responder. La respuesta es que el cambio tecnológico tiene un efecto positivo mayor sobre la tasa de crecimiento cuando empresas y gobierno participan de manera conjunta en las actividades de investigación y desarrollo tecnológico.

Al introducir estos microfundamentos, la investigación arrojó otro resultado importante, el cual consistió en identificar una Función de Innovación de la economía,

la cual muestra que para que existan innovaciones es necesaria la participación de al menos uno de los dos sectores, es decir, el público y/o el privado. La Función de Innovación en su parte determinista genera efectos positivos sobre el equilibrio macroeconómico, mientras que en su parte estocástica genera efectos negativos. En consecuencia se puede responder a la tercera pregunta de investigación ¿Cómo se lleva a cabo este proceso de cambio tecnológico al interior de empresas y gobierno? La respuesta es que el proceso de cambio tecnológico ocurre de acuerdo al aumento en el conjunto de conocimiento disponible en cada sector, y dicho conjunto presenta una dinámica en función de los esfuerzos medios esperados de ambos sectores y de los saltos o innovaciones radicales generados por el gobierno.

Lo anterior permite identificar que a medida que los esfuerzos medios esperados tengan una varianza muy pequeña o cercana a cero, mayor será el efecto positivo sobre el equilibrio macroeconómico y menor será el efecto negativo. En otras palabras, es deseable que los esfuerzos, tanto de las empresas como del gobierno, sean constantes ya que sólo así se mitiga el impacto negativo sobre el equilibrio y el bienestar económico. Evidentemente esto comprueba que el gasto de gobierno, en términos constantes, es deseable para logara un crecimiento balanceado de largo y mediano plazo. Lo que a su vez refuerza los resultados encontrados en el capítulo 3, respecto a que un gasto de gobierno constante que genere un cambio tecnológico, ocasiona una tasa de crecimiento mayor y un aumento en el bienestar económico de los hogares.

5. Conclusiones

En la actualidad países desarrollados generalmente presentan tasas de crecimiento económico mayores a las correspondientes a los países en vías de desarrollo, al inicio de la investigación se planteó que una posible explicación de dicho fenómeno podría

encontrarse en la participación del gobierno en las actividades de investigación y desarrollo tecnológico. Resulta ser que en las economías desarrolladas el sector privado no es el único que lleva a cabo actividades de investigación y desarrollo tecnológico, sino que también el sector público interviene en dichas actividades. En la introducción se mostró como en países como Suecia, Finlandia, E.E.UU., Japón, entre otros, la participación del gobierno a través de un gasto que sustenta laboratorios públicos que realizan actividades encaminadas hacia la generación de nuevas tecnologías es muy amplia y elevada.

En consecuencia, si este fenómeno existe entonces es posible plantearse la pregunta de si la participación del gobierno en las actividades económicas a través de la generación de nuevas tecnologías tiene un efecto sobre el crecimiento económico. Esta pregunta tiene una gran pertinencia ya que en países en vías de desarrollo las actividades de investigación y desarrollo tecnológico por parte del sector privado son muy pocas o nulas. Lo anterior se puede atribuir a la falta de desarrollo en el mercado interno de dichas economías, o por la falta de una institución o marco legal que garantice los derechos de autor y patentes tal que permita obtener a las empresas ganancias extraordinarias derivadas de sus actividades de innovación.

Al respecto, el primer bloque de modelos desarrollados en la presente investigación permitió dar respuesta a esta pregunta al mostrar que cuando el gobierno interviene en las actividades de investigación y desarrollo tecnológico la tasa de crecimiento es mayor que en ausencia del mismo. Más todavía, si el sector privado no realiza actividades de investigación y desarrollo tecnológico, el gobierno se puede ver obligado a realizarlas con el objetivo de incrementar la productividad marginal del capital incrementando así la tasa de crecimiento económico.

A través de diversas hipótesis, como la participación del gobierno a través del gasto en capital físico, o en capital físico y humano de manera simultánea, en una economía real y en una economía monetaria, cuando el individuo aprende de sus decisiones o cuando la economía está abierta, etc., los modelos desarrollados siempre verificaron que la intervención del gobierno en las actividades económicas a través de la generación de nuevas tecnologías tiene un impacto positivo sobre la tasa de crecimiento y el bienestar económico de los hogares. En particular, por medio de un gasto gubernamental constante destinado al cambio tecnológico la economía evoluciona en equilibrio a un ritmo mayor que cuando el gobierno está ausente.

Significa entonces que políticas públicas encaminadas hacia lograr una mayor participación del gobierno en las actividades de investigación y desarrollo tecnológico con el objetivo de fijar metas de crecimiento sostenido de largo y mediano plazo son deseables. Asimismo se mostró que el origen de los recursos del gobierno que destina al cambio tecnológico son de poca importancia ya que mediante un impuesto al consumo, o de suma fija, o un impuesto sobre la renta se mantiene el efecto positivo sobre el crecimiento debido a dicha participación gubernamental.

Un resultado importante respecto a la participación del gobierno en el cambio tecnológico de la economía se encuentra en la obtención de un gasto de gobierno óptimo, el cual se tiene cuando el gobierno decide encontrarlo en función del máximo bienestar de los hogares posible y sujeto a su restricción presupuestal. En otras palabras, si el gobierno en su carácter de altruismo decide destinar recursos al cambio tecnológico tales que el bienestar de los hogares sea el máximo posible en función de su restricción presupuestal, entonces existe un nivel óptimo de gasto.

Dado que se mostró que un gasto de gobierno constante es posible para encontrar el estado estacionario de la economía y determinar el equilibrio, a través de

diversas simulaciones y mediante el método de Newton-Raphson se determinó el nivel óptimo de gasto de gobierno, tal que maximiza el bienestar económico de los hogares, para cada una de la hipótesis que se manejó respecto al cambio tecnológico generado por el gobierno. En todos los casos el nivel óptimo de gasto de gobierno depende de parámetros conocidos por todos los agentes económicos incluido el gobierno, por lo que no altera las condiciones de equilibrio.

Una vez que se probó que la participación del gobierno tiene un efecto positivo sobre el crecimiento y el bienestar económico de los hogares, se realizaron otros modelos en donde se incorporaba también la participación de las empresas. Este segundo bloque de modelos permitió mostrar que si el cambio tecnológico se lleva a cabo de manera simultánea por los sectores público y privado, la tasa de crecimiento es mayor que cuando sólo uno de estos sectores realiza dichas actividades. Con la participación conjunta de empresas y gobierno se mostró además que el bienestar económico de los hogares se incrementa a medida que los recursos destinados por ambos sectores, para la generación de nueva tecnología, aumentan.

La principal aportación al respecto radica en que empresas y gobierno deben realizar actividades de investigación y desarrollo tecnológico ya que sólo así se lograrán mayores tasas de crecimiento económico con respecto a la participación de un solo sector. Lo anterior permitió contestar a la pregunta acerca del efecto sobre el crecimiento económico debido a la generación de un cambio tecnológico ocasionado por esfuerzos conjuntos de las empresas y el gobierno. Dado que el efecto sobre el crecimiento es positivo cuando ambos llevan a cabo actividades de generación de nuevas tecnologías, se introdujeron nuevos microfundamentos para explicar cómo es que dicho proceso de cambio en las condiciones tecnológicas se da.

Al principio se profundizó la microfundamentación sólo el lado del sector público con el objetivo de explicar las características principales de las actividades del gobierno en el campo de la investigación tecnológica. El principal aporte se encuentra en determinar el nivel tecnológico de la economía en función del conjunto de conocimiento que posee el sector público, el cual a su vez es desconocido para el sector privado. Dicho conocimiento presenta una dinámica que permite establecer cómo y bajo qué condiciones se da el cambio tecnológico cuando sólo el gobierno interviene en las actividades de investigación y desarrollo tecnológico.

Asimismo, el conjunto de conocimiento gubernamental determina el nivel de la tasa de crecimiento y del bienestar económico, por lo que aumentos en el mismo, derivados de las innovaciones realizadas al interior de los laboratorios públicos, incrementan la tasa de crecimiento y el bienestar económico de los hogares.

Posteriormente, se aplicó el mismo método respecto al sector privado al suponer que las empresas también tienen acceso a un conjunto de conocimiento, disponible sólo para el sector privado, el cual tiene otra dinámica determinada por la inversión media esperada destinada a la generación de nuevas tecnologías. Al introducir dicha hipótesis al modelo base que incluye la participación del gobierno se mostró que el efecto de ambos sectores, cuando participan en la generación del cambio tecnológico, es positivo sobre la tasa de crecimiento y el bienestar económico.

Asimismo, el equilibrio macroeconómico depende de las actividades de innovación de ambos sectores y del conjunto de conocimiento total disponible en la economía, esto es, del conocimiento gubernamental y del conocimiento empresarial al mismo tiempo. Lo anterior ocasiona que a medida que los esfuerzos medios esperados aumenten, tanto públicos como privados, mayor serán las trayectorias de capital y consumo, así como mayor será la tasa de crecimiento y el bienestar económico.

Por último, se caracterizó el proceso de innovación de la economía en función de las innovaciones radicales propias del gobierno y de las innovaciones incrementales propias del sector empresarial. A través de la Función de Innovación de la economía en su conjunto, es posible verificar las condiciones necesarias para realizar un cambio en el coeficiente tecnológico de la economía. Por el lado gubernamental, las innovaciones radicales son causa de saltos cualitativos en el conjunto de conocimiento, modelados a través de un proceso de difusión con saltos, debido a las actividades del gobierno en materia de innovación tecnológica. Por el lado empresarial, las innovaciones incrementales se obtienen debido a la inversión media esperada que realiza el sector privado con el objetivo de mejorar las condiciones tecnológicas de producción, lo que se traduce en un incremento en la productividad. Lo anterior fue modelado utilizando sólo un proceso de Wiener.

En consecuencia, los resultados obtenidos por todo lo anterior permitieron explicar de manera más profunda, a través de una microfundamentación más completa, el proceso por el cual se dan las innovaciones tecnológicas en la economía. Al ocurrir ambos tipos de innovaciones de manera simultánea, el conjunto de conocimiento de empresas y gobierno se incrementa lo que a su vez eleva el nivel tecnológico de la economía.

Dentro de las principales limitaciones de la presente investigación se pueden mencionar las siguientes. En principio es necesario ampliar el papel del gobierno en la economía, por ejemplo modelar la emisión de bonos gubernamentales y verificar el efecto de los mismos sobre el crecimiento, o introducir el comercio de las nuevas tecnologías desarrolladas entre ambos sectores. Es igual de pertinente preguntarse si un comercio tecnológico entre países tiene algún efecto sobre la productividad marginal capital o sobre la tasa de crecimiento en la economía doméstica.

Asimismo, es necesario analizar el papel del sector bancario como agente que facilita el financiamiento necesario para realizar las actividades de innovación tecnológica. Al respecto, la apertura de la economía puede ser prudente con relación al análisis de los flujos de capitales como una posible fuente de financiamiento para las actividades de investigación y desarrollo de los sectores público y privado. Todo lo anterior da material necesario para profundizar aún más los fundamentos microeconómicos que explican el proceso por el cual a traviesa el cambio tecnológico.

Como se puede adivinar, el camino de investigación al interior de la teoría del crecimiento y en específico en el campo del cambio tecnológico es muy largo y sin duda habrá que recorrerlo.

Apéndice matemático

Apartado 3.3

El Hamiltoniano y las condiciones de primer orden correspondiente al problema de optimización dado por (30) y (33) son:

$$\mathcal{H} = \ln c_t + \lambda[Ag_t k_t - (1 + \tau_c)c_t], \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho. \quad (A.2)$$

Por su parte, el Lagrangiano correspondiente al problema de optimización dado por (47) y (49) es:

$$\mathcal{L} = [\ln(M) + AG_t - \rho t]e^{-\rho t} + \lambda_t(\dot{G}_t - Be^{AG_t - \rho t}), \quad (A.3)$$

en donde $M = \frac{\rho k_0}{(1+\tau_c)}$ y $B = \frac{\tau_c \rho k_0}{(1+\tau_c)}$. La solución está dada por la ecuación de Euler-

Lagrange siguiente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_t} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{G}_t} = 0, \quad (A.4)$$

con lo que se encuentra la ecuación 50.

Apartado 3.4

Derivación de la fórmula (74)

Del problema de optimización planteado por (30) y (71), las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \lambda_t [1 + (\alpha Ag + \alpha \pi)] = 0, \quad (A.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = Ag a_t - [1 + (\alpha Ag + \alpha \pi)] c_t = \dot{a}_t, \quad (A.6)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = -\lambda_t (Ag) = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho, \quad (A.7)$$

Después de despejar el consumo de (A.5), se obtiene:

$$c_t = \frac{1}{\lambda_t [1 + (\alpha Ag + \alpha \pi)]}. \quad (A.8)$$

Al factorizar de (A.7) λ_t y, posteriormente, despejar $\dot{\lambda}_t$ se sigue que:

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t (\rho - Ag). \quad (A.9)$$

Si $\dot{x}_t = \alpha x_t$ la solución de la ecuación diferencial es de la forma $x_t = x_0 e^{\alpha t}$, entonces

las soluciones de las ecuaciones diferenciales (A.6) y (A.9) son respectivamente:

$$a_0 = \int_0^\infty [1 + (\alpha Ag + \alpha \pi)] c_t e^{-(Ag)t} dt, \quad (A.10)$$

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\rho - Ag)t}. \quad (A.11)$$

Si se sustituye (A.11) en (A.6), se obtiene:

$$c_t = \frac{1}{\lambda_0 [1 + (\alpha Ag + \alpha \pi)]} e^{-(\rho - Ag)t}. \quad (A.12)$$

Al sustituir la ecuación (A.12) en (A.10), se tiene:

$$a_0 = \int_0^\infty \frac{[1 + (\alpha Ag + \alpha \pi)]}{[1 + (\alpha Ag + \alpha \pi)] \lambda_0} e^{-(\rho - Ag)t} e^{-(Ag)t} dt, \quad (A.13)$$

Después de simplificar se produce la siguiente ecuación:

$$a_0 = \frac{1}{\lambda_0 \rho} \int_0^\infty \rho e^{-\rho t} . \quad (A.14)$$

Observe que $\int_0^\infty \mu e^{-\mu x} dx = 1$ para $\mu > 0$, entonces

$$\frac{1}{\lambda_0} = \rho a_0. \quad (A.15)$$

De esta manera, cuando se sustituye la ecuación (A.15) en (A.12), se encuentra la trayectoria del consumo:

$$c_t = \frac{\rho a_0}{[1 + (\alpha Ag + \alpha \pi)]} e^{(Ag - \rho)t}. \quad (A.16)$$

Derivación de la fórmula (75)

Si se sustituye la ecuación (A.16) en (A.6), se obtiene:

$$\dot{a}_t = (Ag)a_t - \rho a_0 e^{(Ag - \rho)t}. \quad (A.17)$$

Se sabe que si $\dot{x}_t = \alpha x_t + f(t)$, entonces la solución es de la forma $x_t = x_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \int_0^t f(s) e^{-\alpha s} ds$. Por lo tanto, se obtiene que:

$$a_t = a_0 e^{(Ag)t} - e^{(Ag)t} \int_0^t \rho a_0 e^{(Ag - \rho)s} e^{-(Ag)s} ds. \quad (A.18)$$

Al resolver, la ecuación anterior, se sigue que:

$$a_t = a_0 e^{(Ag - \rho)t}. \quad (A.19)$$

Derivación de las ecuaciones (85) y (86)

Las condiciones de primer orden del problema planteado por (68) y (82) son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \lambda_t = 0, \quad (A.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_t} = \frac{\beta}{m_t} - \lambda_t (Ag + \pi) = 0, \quad (A.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = Ag a_t - (Ag + \pi) m_t - c_t = \dot{a}_t, \quad (A.22)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = -\lambda_t (Ag) = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho. \quad (A.23)$$

Por lo tanto, al despejar el consumo de (A.20) y los saldos reales de (A.21), se tiene respectivamente que:

$$c_t = \frac{1}{\lambda_t}, \quad (A.24)$$

$$m_t = \frac{\beta}{\lambda_t (Ag + \pi)}. \quad (A.25)$$

Después de despejar $\dot{\lambda}_t$ de (A.23), resulta:

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t (\rho - Ag). \quad (A.26)$$

Una vez determinadas las ecuaciones diferenciales (A.22) y (A.26), si se supone que $\lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-(Ag)t} = 0$, se tienen, respectivamente:

$$a_0 = \int_0^\infty (Ag + \pi) m_t + c_t e^{-(Ag)t} dt, \quad (A.27)$$

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\rho - Ag)t}. \quad (A.28)$$

Si se sustituye la ecuación (A.28) tanto en (A.24) como en (A.25), se obtienen:

$$c_t = \frac{1}{\lambda_0 e^{(\rho - Ag)t}}, \quad (A.29)$$

$$m_t = \frac{\beta}{\lambda_0 e^{(\rho - Ag)t} (Ag + \pi)}. \quad (A.30)$$

Si se sustituyen ahora las ecuaciones (A.29) y (A.30) en la ecuación (A.27), resulta que:

$$a_0 = \left(\frac{\beta + 1}{\lambda_0 \rho} \right) \int_0^\infty \rho e^{-\rho t} dt. \quad (A.31)$$

En consecuencia, debido a que $\int_0^\infty \mu e^{-\mu x} dx = 1$ para toda $\mu > 0$, si se despejan $1/\lambda_0$ y β , se llega a:

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{\rho a_0}{\beta + 1}, \quad (A.32)$$

$$\beta = \lambda_0 \rho a_0 - 1. \quad (A.33)$$

Por último para encontrar la trayectoria del consumo se sustituye la ecuación (A.32) en (A.29), y para encontrar la trayectoria de los saldos reales se sustituye la ecuación (A.33) en (A.30), con lo que se obtienen, respectivamente:

$$c_t = \frac{\rho a_0}{\beta + 1} e^{(Ag - \rho)t}, \quad (A.34)$$

$$m_t = \frac{\rho a_0 - 1}{Ag + \pi} e^{(Ag - \rho)t}. \quad (A.35)$$

Apartado 3.5

Derivación de la fórmula (111)

Para determinar dicha ecuación, se despeja de la condición de optimalidad (107) el consumo y se tiene que:

$$c = \frac{1}{\lambda}. \quad (A.36)$$

Al factorizar la condición de optimalidad (109) y despejar λ se sigue que:

$$\dot{\lambda} = \lambda(\rho - Tg_T). \quad (A.37)$$

En seguida, es necesario resolver las ecuaciones diferenciales (108) y (A.37), por lo tanto las soluciones correspondientes son:

$$k_0 = \int_0^\infty c e^{-(Tg_T)t} dt, \quad (A.38)$$

$$\lambda = \lambda_0 e^{-(\rho - Tg_T)t}. \quad (A.39)$$

Cuando se sustituye (A.39) en (A.36), se obtiene:

$$c = \frac{1}{\lambda_0} e^{-(\rho - Tg_T)t}. \quad (A.40)$$

Al sustituir la ecuación (A.40) en (A.38), se tiene:

$$k_0 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda_0} e^{-(\rho - Tg_T)t} e^{-(Tg_T)t} dt. \quad (A.41)$$

Una vez que se resuelve se encuentra que:

$$\frac{1}{\lambda_0} = \rho k_0, \quad (A.42)$$

Finalmente, cuando se sustituye (A.42) en (A.40), se llega a:

$$c = \rho k_0 e^{(Tg_T - \rho)t}. \quad (A.43)$$

Derivación de la fórmula (112)

Para obtener dicha ecuación se sustituye la ecuación (A.43) en (108), y se obtiene:

$$\dot{k} = (Tg_T)k - \rho k_0 e^{(Tg_T - \rho)t}. \quad (A.44)$$

Al resolver, la ecuación diferencial anterior, se sigue que:

$$k = k_0 e^{(Tg_T - \rho)t}. \quad (A.45)$$

Una vez que se obtienen la trayectoria del consumo y del capital, se puede apreciar que ambas trayectorias crecen de acuerdo a $e^{(Tg_T - \rho)t}$, por lo que la tasa de crecimiento balanceado expresada en (114) es:

$$\psi = Tg_T - \rho. \quad (A.46)$$

Finalmente, para encontrar la ecuación (113) sólo se sustituye (A.45) en (105), de esta manera se encuentra:

$$\tilde{y} = Tg_T k_0. \quad (A.47)$$

Lo metodológico es la misma para encontrar las relaciones correspondientes en los desarrollos de los apartados sucesivos, incluyendo el nivel de la riqueza y el nivel de saldos reales, que resultan de la incorporación del dinero en la actividad económica.

Apartado 3.6

Bajo las condiciones de la estructura analítica en términos reales, el problema de optimización dado por (166) y (167) arroja el Hamiltoniano y las condiciones de primer orden a satisfacer siguientes:

$$\mathcal{H} = \alpha \ln c + (1 - \alpha) \ln l + \lambda[(Ag_a k + \eta g_h k)(1 - \tau) - (1 - l) - c] \quad (\text{A. 48})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \dot{k}, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \dot{\lambda} - \lambda \delta. \quad (\text{A. 49})$$

De lo anterior resultan las condiciones de optimalidad determinadas por las ecuaciones (168)-(172), al sustituir (168), (169) y (171) en (170) obtenemos las trayectorias óptimas siguientes:

$$\hat{c}_t = (\alpha \delta k_0 - 1)e^{[(Ag_a + \eta g_h)(1 - \tau) - \delta]t}, \quad (\text{A. 50})$$

$$\hat{l}_t = [(\alpha - 1)\delta k_0 - 1]e^{[(Ag_a + \eta g_h)(1 - \tau) - \delta]t}, \quad (\text{A. 51})$$

$$\hat{k}_t = (k_0 - 1)e^{[(Ag_a + \eta g_h)(1 - \tau) - \delta]t}, \quad (\text{A. 52})$$

$$\hat{y}_t = [(Ag_a + \eta g_h)(k_0 - 1)(1 - \tau)]e^{[(Ag_a + \eta g_h)(1 - \tau) - \delta]t}, \quad (\text{A. 53})$$

Al evaluar los óptimos en $t = 0$ obtenemos las condiciones caracterizadas por las ecuaciones (173)-(177). Por su parte, bajo las condiciones de la estructura analítica en términos nominales se tiene que el Hamiltoniano y las condiciones de primer orden correspondientes, que representan el problema de optimización dado por (167) y (193), son:

$$\mathcal{H} = \alpha \ln c + (1 - \alpha) \ln l + \lambda(rk - w\eta - pc), \quad \eta = T - l, \quad T = 1 \quad (\text{A. 54})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \dot{k}, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \dot{\lambda} - \lambda \delta. \quad (\text{A. 55})$$

De lo anterior resultan las condiciones de optimalidad determinadas por las ecuaciones (194)-(198). Análogamente, al sustituir (194), (195) y (197) en (196) obtenemos las siguientes trayectorias óptimas:

$$\bar{c}_t = \left[\frac{\alpha(\rho k_0 - w)}{p} \right] e^{(r - \delta)t}, \quad (\text{A. 56})$$

$$\bar{l}_t = \left[\frac{(\alpha - 1)(\rho k_0 - w)}{w} \right] e^{(r-\delta)t}, \quad (\text{A. 57})$$

$$\bar{k}_t = k_0 e^{(r-\delta)t}, \quad (\text{A. 58})$$

$$\bar{y}_t = [(Ag_a + \eta g_h)(1 - \tau)k_0] e^{(r-\delta)t}, \quad (\text{A. 59})$$

Al evaluar los óptimos en $t = 0$ y al sustituir (191) y (192), obtenemos las condiciones caracterizadas por las ecuaciones (199)-(203).

Apartado 3.7

La derivación de las condiciones de optimalidad dadas por las ecuaciones (228)-(234) son obtenidas a través del Hamiltoniano a valor presente siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \left[\frac{(c^\alpha m^{1-\alpha})^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{(\eta^\beta d^{1-\beta})^{1+\phi}}{1+\phi} \right] e^{-(\rho-\mu)t} \\ & + \lambda \{ [(1 - \tau_r)r - \mu]a - \tau_r r d - (1 + \tau_c)c - (i - \tau_r r)m \}, \end{aligned} \quad (\text{A. 60})$$

donde las condiciones necesarias son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial d} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \dot{a} \quad \text{y} \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \dot{\lambda} - \lambda \rho. \quad (\text{A. 61})$$

Para encontrar las relaciones de sustitución dadas por las ecuaciones (235) y (236), se dividen (228) entre (229) y (230) entre (231), respectivamente.

Apartado 3.8

El problema de optimización resultante (265), (268') y (269), y las condiciones de optimalidad dadas por las ecuaciones (270)-(274), son el resultado de resolver el siguiente Hamiltoniano y sus condiciones de primer orden:

$$\mathcal{H} = \beta \ln c + \delta \ln l + \lambda [Ak\eta - w\eta - pc], \quad (\text{A. 62})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \dot{k} \quad \text{y} \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \dot{\lambda} - \lambda \rho. \quad (\text{A. 63})$$

Al sustituir (270), (271) y (273) en (272) y resolver se encuentra el equilibrio macroeconómico dado por las ecuaciones (275)-(280). Análogamente, del problema de optimización determinado por (265), (268') y (284) resultan las condiciones de optimalidad caracterizadas en las ecuaciones (287)-(291), que se obtienen al resolver el siguiente Hamiltoniano y sus condiciones de primer orden:

$$\mathcal{H} = \beta \ln c + \delta \ln l + \lambda [(Ag_a^\gamma \eta g_n^{1-\gamma} k - w\eta - pc)], \quad (A.64)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \dot{k} \quad y \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \dot{\lambda} - \lambda \rho. \quad (A.65)$$

Después de sustituir (287), (288) y (290) en (289) y resolver se encuentra el equilibrio macroeconómico dado por las ecuaciones (292)-(297).

Apartado 3.10

Derivación de la ecuación (314).

El problema de máxima entropía establecido en (313) se resuelve a través del Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\kappa(\delta) \log[\kappa(\delta)] + \beta_1 \kappa(\delta) + \beta_2 \delta \kappa(\delta), \quad (A.66)$$

en donde β_1 y β_2 son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. La condición de primer orden es:

$$\kappa(\delta) = e^{\beta_1 - 1 + \beta_2 \delta}. \quad (A.67)$$

Al sustituir (A.67) en la primera restricción de (313), se sigue que:

$$\int_0^\infty \kappa(\delta) d\delta = e^{\beta_1 - 1} \int_0^\infty e^{\beta_2 \delta} d\delta = 1. \quad (A.68)$$

Esta integral sólo es convergente cuando $\beta_2 < 0$, en cuyo caso se puede escribir $\beta_2 = -\gamma$ con $\gamma > 0$ por lo tanto, $\beta_1 = 1 + \log(\gamma)$ En consecuencia, se tiene que $\kappa(\delta) = \alpha e^{-\gamma \delta}$ con $\delta > 0$. Al sustituir $\kappa(\delta)$ en la segunda restricción de (313) se encuentra:

$$\alpha^{-1} \int_0^{\infty} \delta \kappa(\delta) d\delta = \int_0^{\infty} \delta \gamma e^{-\gamma \delta} d\delta = \gamma^{-1}, \quad (A.69)$$

de donde se sigue que $\kappa(\delta) = \alpha e^{-\alpha \delta}$ con $\alpha > 0$.

Derivación de las ecuaciones (327)-(330).

El problema de optimización resultante de (316), (321) y (322), y sus condiciones de optimalidad dadas por las ecuaciones (323)-(326), son el resultado de resolver el siguiente Hamiltoniano y sus condiciones de primer orden:

$$\mathcal{H} = -\frac{\alpha}{c + \alpha} + \lambda(Ark - pc), \quad (A.70)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \dot{k} \quad y \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \dot{\lambda} - \lambda \rho. \quad (A.71)$$

Al sustituir (323) y (325) en (324) y resolver se encuentra el equilibrio macroeconómico dado por las ecuaciones (327)-(330).

Apartado 4.1

Derivación de las condiciones establecidas por (358)-(366)

El problema de optimización establecido por las ecuaciones (340), (351), (352) y (355), tiene como Hamiltoniano y condiciones de primer orden a satisfacer:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \ln c_t + \lambda_t [Agk_t^\alpha h_t^{1-\alpha} - (1 + t_c)c_t - i_t^k - i_t^h] \\ & + \mu_t(i_t^k - \delta k_t) + \omega_t(i_t^h - \delta h_t), \end{aligned} \quad (A.72)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i_t^k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i_t^h} = 0, \quad (A.73)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = k_t, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_t} = \dot{\mu}_t, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h_t} = \dot{\omega}_t, \quad (A.74)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h_t} = \dot{\omega}_t - \omega_t \rho. \quad (A.75)$$

Al sustituir las condiciones establecidas en (A.75) en (A.73) y simplificar, se encuentran las condiciones de optimalidad dadas en (358)-(366).

Apartado 4.2

Derivación de la ecuación (377)

De acuerdo con el problema planteado por (374) y (376), se tiene que:

$$J(k, t) = \text{Max}_{c_s | [t, t+dt]} E\{\ln(c)e^{-\rho t} + o(dt) + J(k, t) + dJ(k, t) | \mathcal{F}_t\}. \quad (\text{A. 76})$$

El Lema de Íto establece que:

$$dJ(k, t) = \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial k} k \left(\mu_a - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial k^2} k^2 \sigma_a^2 \right] dt + \frac{\partial J}{\partial k} k \sigma_a dw. \quad (\text{A. 77})$$

Al elegir,

$$J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}, \quad (\text{A. 78})$$

y aplicar (A.77) y (A.78), tomar esperanzas, contemplar que $E(dw) = 0$, dividir entre dt y tomar el límite cuando $t \rightarrow 0$ a (A.76), se encuentra la ecuación (377):

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(\mu_a - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 \sigma_a^2 \quad (\text{A. 79})$$

Apartado 4.3

Derivación de la ecuación (399)

De igual forma que en el apéndice correspondiente al apartado anterior, el problema planteado por (397) y (398), arroja que:

$$J(k, t) = \text{Max}_{c_s | [t, t+dt]} E\{\ln(c)e^{-\rho t} + o(dt) + J(k, t) + dJ(k, t) | \mathcal{F}_t\}. \quad (\text{A. 80})$$

Por su parte, el Lema de Íto establece que:

$$dJ(k, t) = \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial k} k \left(g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial k^2} k^2 \hat{g}^2 \right] dt + \frac{\partial J}{\partial k} k \hat{g} dz. \quad (\text{A. 81})$$

Si se establece de nuevo que $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$, entonces:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 \hat{g}^2 \quad (\text{A.82})$$

Recordando que para encontrar (A.82) se necesita sustituir $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$, aplicar (A.81), tomar esperanzas y fijar $E(dz) = 0$, dividir entre dt y tomar el límite cuando $t \rightarrow 0$ a (A.80).

Apartado 4.4

Derivación de la ecuación (417)

El problema planteado por (412) y (416), arroja que:

$$J(k, t) = \text{Max}_{c_s | [t, t+dt]} E\{\ln(c)e^{-\rho t} + o(dt) + J(k, t) + dJ(k, t) | \mathcal{F}_t\}. \quad (\text{A.83})$$

Al aplicar el Lema de Íto se tiene:

$$dJ(k, t) = \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial k} k \left(A\mu_g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial k^2} k^2 \sigma_g^2 A^2 \right] dt + \frac{\partial J}{\partial k} k \sigma_g A dw. \quad (\text{A.84})$$

Si se establece una vez más que $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$, entonces:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(A\mu_g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 \sigma_g^2 A^2 \quad (\text{A.85})$$

Para encontrar (A.85) se necesita sustituir $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$, aplicar (A.84), tomar esperanzas y fijar $E(dw) = 0$, dividir entre dt y tomar el límite cuando $t \rightarrow 0$ a (A.83).

Apartado 4.5

Derivación de la ecuación (448)

El problema planteado por (434) y (446), arroja que:

$$J(k, t) = \text{Max}_{c_s | [t, t+dt]} E\{\ln(c)e^{-\rho t} + o(dt) + J(k, t) + dJ(k, t) | \mathcal{F}_t\}. \quad (\text{A.86})$$

Al aplicar el Lema de Íto se tiene:

$$dJ(k, t) = \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial k} k \left(\Omega(g) + \Gamma(e) - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial k^2} k^2 [\Omega(\hat{g}) + \Gamma(\hat{e})]^2 \right] dt$$

$$+ \frac{\partial J}{\partial k} k [\Omega(\hat{g}) + \Gamma(\hat{e})] dw. \quad (A.87)$$

Si se establece una vez más que $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$, entonces:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(\Omega(g) + \Gamma(e) - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 [\Omega(\hat{g}) + \Gamma(\hat{e})]^2. \quad (A.88)$$

Para encontrar (A.88) se necesita sustituir $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$, aplicar (A.87), tomar esperanzas y fijar $E(dw) = 0$, dividir entre dt y tomar el límite cuando $t \rightarrow 0$ a (A.86).

Apartado 4.6

Derivación de la ecuación (477)

El problema planteado por (469) y (476), arroja que:

$$J(k, t) = \text{Max}_{c_s | [t, t+dt]} E\{\ln(c)e^{-\rho t} + o(dt) + J(k, t) + dJ(k, t) | \mathcal{F}_t\}. \quad (A.89)$$

Al aplicar el Lema de Íto se tiene:

$$\begin{aligned} dJ(k, t) = & \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial k} k \left(\Omega(g) - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial k^2} k^2 (\Omega(\hat{g}))^2 \right] dt \\ & + \frac{\partial J}{\partial k} k (\Omega(\hat{g}) dw + [J(k\Omega(1 + \bar{g})) - J(k)] dq. \end{aligned} \quad (A.90)$$

Si se establece una vez más que $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$ y al sustituir la condición establecida en (472), entonces:

$$\begin{aligned} 0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(\Omega(g) - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 [\Omega(\hat{g})]^2 \\ + [V(k\Omega(1 + \bar{g})) - V(k)] \theta. \end{aligned} \quad (A.91)$$

Para encontrar (A.91) además es necesario sustituir $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$, aplicar (A.90), tomar esperanzas y fijar $E(dw) = 0$, dividir entre dt , considerar (475) y tomar el límite cuando $t \rightarrow 0$ a (A.89).

Apartado 4.7

Derivación de la ecuación (503)

El problema planteado por (498) y (495), arroja que:

$$J(k, t) = \text{Max}_{c_s|_{[t, t+dt]}} E\{\ln(c)e^{-\rho t} + o(dt) + J(k, t) + dJ(k, t)|\mathcal{F}_t\}. \quad (\text{A. 92})$$

Al aplicar el Lema de Íto se tiene:

$$\begin{aligned} dJ(k, t) = & \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial k} k \left(\Gamma e - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial k^2} k^2 (\Gamma \hat{e})^2 \right] dt \\ & + \frac{\partial J}{\partial k} k \Gamma \hat{e} dw + [J(k\Omega(1 + \bar{g})) - J(k)] dq. \end{aligned} \quad (\text{A. 93})$$

Al suponer que $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$ y al sustituir la condición establecida en (499), se tiene la condición *Hamilton-Jacobi-Bellman*:

$$\begin{aligned} 0 = & \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(\Gamma e - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 [\Gamma(\hat{e})]^2 \\ & + [V(k\Omega(1 + \bar{g})) - V(k)] \omega. \end{aligned} \quad (\text{A. 94})$$

Para encontrar (A.94) además es necesario sustituir $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$, aplicar (A.93), tomar esperanzas y fijar $E(dw) = 0$, dividir entre dt , considerar (499) y tomar el límite cuando $t \rightarrow 0$ de (A.92).

Apartado 4.8

Derivación de la ecuación (534)

El problema planteado por (523) y (526), arroja que:

$$J(k, t) = \text{Max}_{c_s|_{[t, t+dt]}} E\{\ln(c)e^{-\rho t} + o(dt) + J(k, t) + dJ(k, t)|\mathcal{F}_t\}. \quad (\text{A. 95})$$

Al aplicar el Lema de Íto se tiene:

$$dJ(k, t) = \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial k} k \left(\Omega g + \Gamma e - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial k^2} k^2 (\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e})^2 \right] dt$$

$$+ \frac{\partial J}{\partial k} k(\Omega \hat{g} + \Gamma \hat{e}) dz + [J(k\Omega(1 + \bar{g})) - J(k)] dq. \quad (A.96)$$

Al suponer que $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$ y al sustituir la condición establecida en (527), se tiene la condición *Hamilton-Jacobi-Bellman*:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(\Omega g + \Gamma e - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 [\Omega \hat{g} + \Gamma(\hat{e})]^2 + [V(k\Omega(1 + \bar{g})) - V(k)] \lambda. \quad (A.97)$$

Para encontrar (A.97) además es necesario sustituir $J(k, t) = V(k)e^{-\rho t}$, aplicar (A.96), tomar esperanzas y fijar $E(dw) = 0$, dividir entre dt , considerar (527) y tomar el límite cuando $t \rightarrow 0$ de (A.95).

Referencias

- Aghion, P. y P. Howitt, (1992), "A Model of Growth through Creative Destruction", *Econometrica*, Vol. 60, No. 2, pp. 323-351.
- Aghion, P. y P. Howitt, (1994), "Endogenous Technical Change: The Schumpeterian Perspective, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development: Proceedings of the IEA Conference", Varenna Italy, pp. 118-131.
- Arrow, K., (1962a), "The Economic Implications of Learning by Doing", *Review of Economic Studies*, Vol. 29, No. 3, pp. 155-173.
- Arow. K., (1962b), "Economic Welfare and the Allocation of Resources for Invention". In Nelson, R.R. (Ed.), *The Rate of Direction of Inventive Activity*, Princeton University Press (NBER), pp. 609-625.
- Azako, Kazumi, (1983), "The Utility Function and the Superneutrality of Money on the Transition Path", en *Econometrica*, Vol. 51, No.5, pp. 1593-1596.
- Bacon, Francis, (1926), "*The New Atlantis*", London.

- Banks, R.B. (1994), *Growth and Diffusion Phenomena*, Springer, Berlin.
- Bardhan, P. P., (1967), *Optimum Foreign Borrowing, Essays on the Theory of Optimal Economic Growth* (K. Shell ed.), MIT Press.
- Barro, R., (1990), "Government Expending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, pp. S103-S125.
- Barro, R. y X. Sala-i-Martin, (1992), "Public Finance in Models of Economic Growth", *Review of Economic Studies*, Vol. 59, pp. 654-661.
- Barro, R. y X. Sala-i-Martin, (1995), *Economic Growth*, Advanced Series in Economics, McGraw-Hill.
- Benavie, A., E. Grinols, S. Turnovsky, (1996), "Adjustment Costs and Investment in a Stochastic Endogenous Growth Model", *Journal of Monetary Economics*, Vol.38, pp. 77-100.
- Benhabib, J, y B. Jovanovic, (1991), "Externalities and Growth Accounting", *American Economic Review*, Vol. 81, No. 1, pp. 82-113.
- Blanchard, Oliver y Stanley Fisher, (1998), "Lectures of Macroeconomics", Massachusetts & London, The MIT Press, p. 165.
- Bond W., P., Wang, K., Yip, (1996), "A General Two-Sector Model of Endogenous Growth with Human and Physical Capital: Balanced Growth and Transitional Dynamics", *Journal of Economic Theory*, Vol. 68, pp. 149-173.
- Boserup, E., (1965), "The Conditions of Agricultural Progress", Aldine Publishing Company, Chicago, IL.
- Boucekkine, R. y D. de la Croix, (2003), "Information Technologies, Embodiment and Growth", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 27, pp. 2007-2034.

- Caminati, M., (2001), "R&D Models of Economic Growth and the Long-Term Evolution of Productivity and Innovations, Conference: Old and New Growth Theories: An Assessment", University of Pisa, October, pp. 1-28.
- Caminati, M., (2004), "Variety, Consumption and Growth, Conference Economic Growth and Distribution: On the Nature and Causes of the Wealth of Nations", University of Siena, June, pp. 1-25.
- Cass, D., (1965), "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, No. 32, pp. 233 – 240.
- Cazzavillan, G., (1996), "Public Spending, Endogenous Growth and Endogenous Fluctuations", *Journal of Economic Theory*, Vol. 71, pp. 394-415.
- Chatterjee, S., G. Sakoulis, S. Turnovsky, (2002), "Unilateral Capital Transfers, Public Investment and Economic Growth", *European Economic Review*, Vol. 47, pp. 1077-1103.
- Clower, Robert, (1967), "A Reconsideration of the Microfoundations of Monetary Theory", en *Western Economic Journal*, Vol. 6, pp. 1-8.
- Dixit, A.K. y J. Stiglitz, (1977), "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity", *American Economic Review*, 72, pp. 389-405.
- Domar, E., (1946), "Capital Expansion, Rate of Growth and Employment", *Econometrica*, Vol. 14, No. 2, pp. 137-147.
- Dosi, G., C. Freeman, S. Fabiani, R. Aversi, (1994), "The Diversity of Development Patterns: Catching up, Forging Ahead and Falling Behind, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development: Proceedings of the IEA Conference", Varenna Italy, pp. 132-167.

- Easterly, W., R. King, R. Levine, S. Rebelo, (1994), "Policy, Technology Adoption and Growth, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development: Proceedings of the IEA Conference", Varenna Italy, pp. 75-89.
- Eicher, T., (2001), "On the Mechanics of Technical Change: New and Old Ideas in Economic Growth, Conference: Old and New Growth Theories: An Assessment", University of Pisa, October, pp. 1-24.
- Eicher, T., y Turnovsky, S., (1999), "Non-Scale Models of Economic Growth", *Economic Journal*, Vol. 109, No. 457, pp. 394-415. ✓
- Eurostat. (2008). Indicadores GERD (Gross Expenditure in Research And Development). <http://epp.eurostat.ec.europa.eu> (4 de mayo 2008).
- Fagerberg, I., (1988), "Why Growth Rates Differ", in Dosi *et al.*
- Fischer, Stanley, (1979), "Capital Accumulation on the Transition Path in a Monetary Optimizing Model", en *Econometrica*, Vol. 47, No. 6, pp. 1433-1439.
- Fisher, W., y S., Turnovsky, (1998), "Public Investment, Congestion, and Private Capital Accumulation", *The Economic Journal*, Vol. 108, No. 447, pp. 399-413.
- Futagami, Koichi, Morita, Yuichi, y Akihisa Shibata, (1993), "Dynamic Analysis of a Endogenous Growth Model with Public Capital", *The Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 95, No.4, pp. 607-625.
- Glomm, G. y B. Ravikumar, (1994), "Public Investment in Infrastructure in a Simple Growth Model", *Journal of Economics Dynamics and Control*, Vol. 18, pp. 1173-1187.
- Gong, L. y H. Zou, (2003), "Military Spending and Stochastic Growth", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 28, pp. 153-170.

- Gokan, Y., "Infrastructure, Alternative Government Finance and Stochastic Endogenous Growth", *Journal of economic Dynamics and Control*, doi:10.1016/j.jedc.2007.01.029.
- Grossman, G.M. y E. Helpman, (1991), "Innovation and Growth in the Global Economy", MIT Press, Cambridge MA.
- Ham, R. y D. Mowery, "Improving the Effectiveness of Public-Private R&D Collaboration: Case Studies at a US weapons Laboratory", *Research Policy*, 26, pp. 661-675.
- Harrod, R., (1939), "An Essay in Dynamic Theory", *The Economic Journal*, Vol. 49, No. 193, pp. 14-33.
- Howitt, P., (1999), "Steady Endogenous Growth with Population and R&D Inputs Growing", *The Journal of Political Economy*, Vol. 107, No. 4, pp. 715-730.
- Huffman, G., (2007), "Endogenous Growth through Investment-specific Technological Change", *Review of Economic Dynamics*, No. 10, pp. 615-645.
- INEGI, (2005), Segundo Censo de Población y Vivienda.
- Intriligator, M. D., (1971), *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice Hall, Series in Mathematical Economics.
- Jones, C., (1995), "R&D-Based Models of Economic Growth", *The Journal of Political Economy*, Vol. 103, No. 4, pp. 759-784.
- Jones, Larry y Rodolfo Manuelli, (1990), "A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Policy Implications", *The Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, Part 1, pp. 1008-1038.
- Koopmans, T. C., (1965), "On the Concept of Optimal Economic Growth", *The Econometric Approach to Development Planning*, Amsterdam, North Holland

- Kuznets, S. (1960), "Population Change and Aggregate Output". In Demographic and Economic Change in Developed Countries, Princeton University Press, Princeton NJ.
- Landesmann, M. y R. Goodwin, (1994), "Productivity Growth, Structural Change and Macroeconomic Stability, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development: Proceedings of the IEA Conference", Varenna Italy, pp. 205-240.
- Lucas, R., (1988), "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 22, pp. 3-42.
- Lucas, R. Jr., y Stokey N., (1983), "Optimal Fiscal and Monetary Policy in an Economy without Capital", *Journal of Monetary Economics*, No. 12, pp. 55-93.
- Ludvigson, S., (1996), "The Macroeconomic Effects of Government Debt in a Stochastic Growth Model", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 38, pp. 25-45.
- Malthus, T. R., (1798), "An Essay on the Principle of Population", London.
- Mamumeas, T., (1999), "Spillovers from Publicly Financed R&D Capital in High-Tech Industries, *International Journal of Industrial Organization*, 17, pp. 215-239.
- Mamumeas, T. y M. Nadiri, (1996), "Public R&D Policies and Cost Behavior of the US Manufacturing Industries", *Journal of Public Economics*, 63, pp. 57-81.
- Merton, R., (1975), An Asymptotic Theory of Growth Under Uncertainty, *The Review of Economic Studies*, Vol. 42, No. 3, pp. 375-393.
- Morales, M., (2004), "Research Policy and Endogenous Growth", *Spanish Economic Review*, No. 6, pp. 179-209.
- Nelson, R. y E. Phelps., (1966), "Investment in Humans, Technological Diffusion, and Economic Growth", *The American Economic Review*, Vol. 56, No. 1/2, pp. 69-75.

- Nordhaus, W., (1969), "An Economic Theory of Technological Change", *The American Economic Review*, Vol. 59, No. 2, pp. 18-28.
- OECD Factbook (2008), Economic, Environmental and Social Statistics, Science and Technology - Research and Development (R&D) - Expenditure on R&D, OECD ISBN 92-64-04054-4.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, (2008), OECD Statistical Profile by Country. <http://www.oecd.org> (4 de mayo 2008).
- Patinkin, Don, (1956), "Money, Interest and Prices", Massachusetts, The MIT Press.
- Pavitt, K. y L. Soete, (1981), "International Differences in Economic Growth and the International Location of Innovation, Emerging Technologies: Consequences for Economic Growth, Structural Change and Employment".
- Pasinetti, L., (1994), "The Structure of Long-Term Development: Concluding Comments, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development: Proceedings of the IEA Conference". Varenna Italy, pp. 353-362.
- Phelps, E.S., (1966), "Models of Technological Progress and the Golden Rule of Research", *Review of Economic Studies*, Vol. 33, No. 2, pp. 133-145.
- Prescott, E. y J. Boyd, (1987), "Dynamics Coalitions: Engines of Growth", *The American Economic Review*, Vol. 77, No. 2, pp. 63-67.
- Ramsey, F., (1928), "A Mathematical Theory of Saving", *The Economic Journal*, Vol. 38, No. 152, pp. 543-559.
- Rebelo, Sergio, (1991), "Long Run Policy Analysis and Long Run Growth", en *The Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, pp. 500 – 521.
- Reikard, G., (2005), "Endogenous Technical Advance and the Stochastic Trend in Output: A Neoclassical Approach", *Research Policy*, Vol. 34, pp. 1476-1490.

Reis, Ricardo, (2001), "The Analytics of Monetary Non-Neutrality in the Sidrauski Model", Princeton, Princeton University Press, pp. 1-8.

Ricardo, D., (1817), "Principles of Political Economy and Taxation", London.

Rivas Aceves, S. y F. Venegas-Martínez, (2008), "Participación del Gobierno en el Desarrollo Tecnológico en un Modelo de Crecimiento Endógeno de una Economía Monetaria", *Problemas del Desarrollo, Revista Latinoamericana de Economía*, Vol. 39, No. 152, pp. 47-68. ✓

Rivas-Aceves, S. y Z. Carranco Gallardo, 2009, "El Gobierno como Promotor del Crecimiento: Desarrollo Tecnológico e Incremento de la Habilidad Laboral", *Análisis Económico*, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma Metropolitana – Unidad Azcapotzalco, Vol. 24, No. 55, pp. 235-254. ✓

Rivera-Batiz, L. y P. Romer, (1991), "International Trade with Endogenous Technological Change", *European Economic Review*, Vol. 35, pp. 971-1004.

Romer, P., (1986), "Increasing Returns and Long-Run Growth", *The Journal of Political Economy*, Vol. 94, No. 5, pp. 1002-1037.

Romer, P., (1987), "Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization", *The American Economic Review*, Vol. 77, No. 2, Papers and Proceedings of the Ninety-Ninth Annual Meeting of the American Economic Association, pp. 56-62.

Romer, P., (1990a), "Endogenous Technological Change", *The Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, Part 2: The Problem of Development: A Conference of the Institute for the Study of Free Enterprise System, pp. S71-S102.

Romer, P., (1990b), "Are Nonconvexities Important for Understanding Growth?", *The American Economic Review*, Vol. 80, No. 2, pp. 97-103.

- Romer, P., (1994), "The Origins of Endogenous Growth", *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 8, No.1, pp. 3-22.
- Schumpeter, J. A., (1942), "Capitalism, Socialism and Democracy", New York, Harper and Brothers.
- Segerstrom, P., A. Anant, E. Dinopoulos, (1990), "A Schumpeterian Model of the Product Life Cycle", *The American Economic Review*, Vol. 80, No. 5, pp. 1077-1091.
- Shell, K., (1966), "Toward a Theory Inventive Activity and Capital Accumulation". American Economic Association Papers and Proceedings 56, pp. 62-68.
- Sidrauski, Miguel, (1967), "Rational Choices and Patterns of Growth in a Monetary Economy", en *American Economic Review*, Vol. 57, No. 2, pp. 534-544.
- Smith, A., (1776), "An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations", Edinburgh.
- Solow, R., (1956), "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, No. 1, pp. 65-94.
- Solow, R., (1957), "Technical Change and the Aggregate Production Function", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 39, No. 3, pp. 312-320.
- Solow, R., (1994), "Perspectives on Growth Theory", *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 8, No.1, pp. 45-54.
- Spence, M., (1976), "Product Selection, Fixed Cost, and Monopolistic Competition", *Review of economic Studies*, Vol. 43, No. 2, pp. 217-235.
- Syrquin, M., (1994), Structural Transformation and the New Growth Theory, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development: Proceedings of the IEA Conference, Varenna Italy, pp. 3-21.

Swan, T., (1956), "Economic Growth and Capital Accumulation," *Economic Record*, No. 32, pp. 334-361.

Tirado, R., (2000), "Crecimiento con Cambio Tecnológico Endógeno, Bancos y Dinero", *Universidad Autónoma Metropolitana*, pp. 1- 31.

Revisar?

/ Turnovsky, S., (1993), "Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy", *International Economic Review*, Vol. 34, No. 4, pp. 953-981.

/ Turnovsky, S., (1996), "Optimal Tax, Debt, and Expenditure Policies in a Growing Economy", *Journal of Public Economics*, Vol. 60, pp. 21-44.

/ Turnovsky, S., (1998), "Productive Government Expenditure in a Stochastically Growing Economy", University of Washington, Seattle, pp. 1-38.

/ Turnovsky, S., (1999), "On the Role of Government in a Stochastically Growing Open Economy", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 23, pp. 873-908.

/ Turnovsky, S., (2000a), "Government Policy in a Stochastic Growth Model with Elastic Labor Supply", *Journal of Public Economic Theory*, Vol. 2, pp. 389-433.

/ Turnovsky, S., (2000b), "Fiscal Policy, Elastic Labor Supply, and Endogenous Growth", *Journal of Monetary Economics*, No. 45, pp. 185-210.

/ Turnovsky, S., (2001), "Old and New Growth Theories: A Unifying Structure? Conference: Old and New Growth Theories: An Assessment", University of Pisa, pp. 1-40.

/ Turnovsky, S., (2004), "The Transitional Dynamics of Fiscal Policy: Long-Run Capital Accumulation and Growth" *Journal of Money, Credit, and Banking*, Vol. 36, No. 5, pp 1-30.

Uzawa, H., (1965), "Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Endogenous Growth", *International Economic Review*, Vol. 6, No.1, pp. 18-31.

Venegas-Martínez, Francisco, (1999), "Crecimiento endógeno, dinero, impuestos y deuda externa", en *Investigación Económica*, Vol. 59, No. 229, pp.15-36.

Venegas-Martínez Francisco, (2006), "Riesgos Financieros y Económicos", Editorial Thompson. México, D.F.

Venegas-Martínez, Francisco, (2008) "Un modelo estocástico de equilibrio macroeconómico: acumulación de capital, inflación y política fiscal", en *Investigación Económica*, por aparecer. A ✓

Venegas-Martínez F. y S. Rivas-Aceves, (2008), "Impulso Tecnológico Gubernamental en la Agroindustria, un Modelo de Crecimiento Endógeno", *Portes, Revista Mexicana de estudios sobre la Cuenca del Pacífico*, Universidad de Colima, Vol. 2, No. 3, enero-junio, pp. 203-234. ✓

Young, A., (1998), "Growth without Scale Effects", *The Journal of Political Economy*, Vol. 106, No. 1, pp. 41-63.